1. ANALYSIS: FUNKTIONSBESTIMMUNG; EXTREMALWERTPROBLEM

a) $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx + c$

Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse: $c = 0$

Durch den Punkt $P(0|25)$ $25 = d$

beide Werte einsetzen!

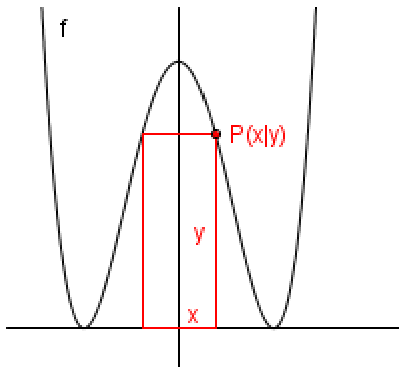
Berührungspunk(Minimum) in $x_1 = \sqrt{5}$ $0 = 4a\sqrt{5}^3 + 2b\sqrt{5}$

der Graph geht durch $(\sqrt{5}|0)$ $0 = 25a + 5b + 25$

die erste Gleichung teilen wir durch $2\sqrt{5}$ $0 = 2a \cdot 5 + b = 10a + b$
die zweite Gleichung teilen wir durch 5 $0 = 5a + b + 5$

Lösung des Systems: $x = 1,\ y = -10 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^4 - 10x^2 + 25$

1. b) Für die Fläche des Rechtecks gilt:



$$A = 2x \cdot y = 2x(x^4 - 10x^2 + 25)$$
$$= 2x^5 - 20x^3 + 50x$$

Die Fläche ist maximal, wenn:

$$A' = 10x^4 - 60x^2 + 50 = 0$$

Lösung der Gleichung:

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$
$$(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0$$
$$(x+1)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) = 0$$

Brauchbar sind die Lösungen $x = 1$ und $x = -1$, die andern beiden liegen gerade in den Tiefpunkten der Kurve und die Fläche des Rechtecks wäre Null.

Gesuchte Punkte: $P(1|16),\ (-1|16),\ (1|0),\ (-1|0)$

Maximum, denn: $A'' = 40x^3 - 60x \quad \Rightarrow \quad A''(1) = 20 - 60 = 40 < 0$

2. ANALYSIS: GEBROCHEN- RATIONALE FUNKTION

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}$$

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\sqrt{3} \right\}$

b) Pole bei $x = \pm\sqrt{3}$

$$\begin{array}{l} (x^3 - x^2 \qquad + 3) : (x^2 - 3) = x - 1 + \frac{3x}{x^2-3} \\ \underline{x^3 \qquad - 3x} \\ \quad - x^2 + 3x + 3 \\ \quad \underline{- x^2 \qquad + 3} \\ \qquad\quad 3x \end{array}$$

Schiefe Asymptote: $y = x - 1$

c) $x^2(x^2 - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 0,\ \ x_3 = 3,\ \ x_4 = -3$

$x = 0$: $\quad f''(0) = 0 \quad$ Sattelpunkt

$x = 3$: $\quad f''(3) > 0 \quad$ Minimum in $(3|3.5)$

$x = -3$: $\quad f''(-3) < 0 \quad$ Maximum in $(-3|-5.5)$

3. ANALYSIS: FLÄCHEN- UND VOLUMENBERECHNUNG

a) Nullstellen der Funktion bei $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

$$y = 3x\sqrt{1-x}$$
$$y^2 = 9x^2(1-x) = 9x^2 - 9x^3$$

$$V = \pi\int_0^1 (9x^2 - 9x^3)\,dx = \pi\left[3x^3 - \tfrac{9}{4}x^4\right]_0^1 = \pi\left(3 - \tfrac{9}{4}\right) - 0 = \frac{3\pi}{4}$$

b) Schnittpunkte von f und g:

$$x^3 - x^2 + 1 = 2x + 1$$
$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^3 - x - 2) = 0$$
$$x(x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$$

Differenz der Funktionen f und g: $x^3 - x^2 + 1 - (2x+1) = x^3 - x^2 - 2x$

Stammfunktion davon: $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 = \dfrac{x^2}{12}\cdot(3x^2 - 4x - 12)$

Es sind zwei Flächenstücke zu berechnen:

$$A_1 = \left[\frac{x^2}{12}\cdot(3x^2 - 4x - 12)\right]_{-1}^{0} = 0 - \frac{1}{12}\cdot(3 + 4 - 12) = \frac{5}{12}$$

$$-A_2 = \left[\frac{x^2}{12}\cdot(3x^2 - 4x - 12)\right]_{0}^{2} = \frac{4}{12}\cdot(12 - 8 - 12) = -\frac{8}{3}$$

Die gesuchte Flächeninhalt ist: $A = A_1 + A_2 = \dfrac{5}{12} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{37}{12}$

4. ANALYSIS: VERMISCHTES

a) $f(x) = x \cdot e^{\sin x}$ $\qquad f'(x) = 1 \cdot e^{\sin x} + x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x$

$g(x) = \dfrac{1-2x}{x^2+1}$ $\qquad g'(x) = \dfrac{-2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (1-2x)}{(x^2+1)^2}$

b)
$$y = -1 + 2\cos(\tfrac{\pi}{2} \cdot x)$$
$$y' = -\ 2\sin(\tfrac{\pi}{2} \cdot x) \cdot \tfrac{\pi}{2} = -\pi \sin(\tfrac{\pi}{2} \cdot x)$$
$$y'' = -\pi \cos(\tfrac{\pi}{2} \cdot x) \cdot \tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{\pi^2}{2} \cos(\tfrac{\pi}{2} \cdot x)$$

Wendepunkte: $\quad -\tfrac{\pi^2}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2} \cdot x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} \cdot x) = 0$

$$\tfrac{\pi}{2} \cdot x = \tfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad \Big| \cdot \tfrac{2}{\pi}$$
$$x = 1 + 2k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

c) $\mathfrak{I} = \displaystyle\int_0^a \cos(\tfrac{x}{2})\,dx = \Big[2 \cdot \sin(\tfrac{x}{2})\Big]_0^a = 2 \cdot \sin(\tfrac{a}{2}) - 0$

$$2\sin(\tfrac{a}{2}) = 1$$
$$\sin(\tfrac{a}{2}) = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{a}{2} = 30°$$
$$a = 60° \quad \text{oder} \quad a = \tfrac{\pi}{3}$$

5. VEKTORGEOMETRIE

a)

$$\begin{array}{lrcl} F: & x + y + 2z - 5 = 0 & & \\ G: & x - y - \;\; z - 2 = 0 & \Rightarrow & y = x - z - 2 \\ \hline & 2x \quad + \;\; z - 7 = 0 & \Rightarrow & z = 7 - 2x \end{array}$$

Wir suchen zwei Punkte der Schnittgeraden:

z. B.
$x = 0,\ z = 7,\ y = -9 \quad \Rightarrow \quad S_1\,(0|-9|7)$
$x = 2,\ z = 3,\ y = -3 \quad \Rightarrow \quad S_2\,(2|-3|3)$

Eine Gleichung der Schnittgeraden: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bemerkung: der Richtungsvektor kann auch aus dem Produkt der beiden Normalenvektoren gewonnen werden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 2 = 2 = \sqrt{6} \cdot 3 \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15.8°$

6. Vektorgeometrie: Kreise und Tangenten

a) Für Schnittpunkte $(x|y)$ gilt:

$$(x-7)^2 + (y-4)^2 = 100$$
$$x = 3 + 3t$$
$$y = 6 + t$$

Varianten:
- Zeigen, dass (3/6) näher als 10 bei M
- Zeigen, dass der Abstand Mg<10

wir setzen die unteren beiden Gleichungen in der ersten ein:

$$(3t-4)^2 + (t+2)^2 = 100$$
$$10t^2 - 20t - 80 = 0$$
$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

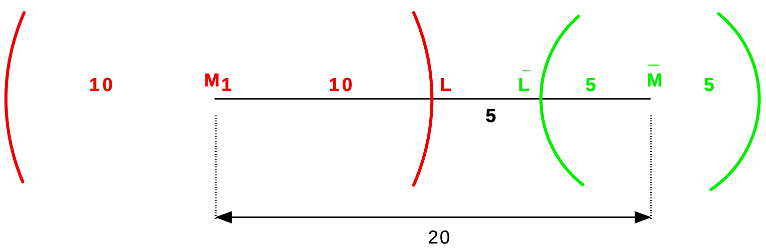
Die Gleichung hat zwei Lösungen, es gibt zwei Schnittpunkte.

b) $3x + y = 3 \cdot 7 + 4 = 25$

c) $(13-7)^2 + (12-4)^2 = 36 + 64 = 100$

$$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \,//\, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad 3x + 4y = 39 + 48 = 87 \quad \text{als Tangentengleichung}$$

d) $\overrightarrow{\bar{M}M} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\qquad \left|\overrightarrow{\bar{M}M}\right| = 20$



Es ist: $M_1L : L\bar{L} : \bar{L}\bar{M} = 10 : 5 : 5 = 2 : 1 : 1$

$$\overrightarrow{\bar{M}\bar{L}} = \tfrac{1}{4}\overrightarrow{\bar{M}M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{L}\,(-9|-8)$$

$$\overrightarrow{\bar{M}L} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\bar{M}M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L\,(-6|-4)$$

7. VEKTORGEOMETRIE

a) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichung der Ebene E: $6x - 4y + z = -8$

b) Fläche des Dreiecks ABC: $\frac{1}{2}\sqrt{18^2 + 12^2 + 3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{53}$

c) Es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 + 12 + 6z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = -3 \quad \Rightarrow \quad D(0|2|1)$$

d)

$$V = \tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{CA}\ \overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CD}\right) = \tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{36 - 24 - 9}{6} = \frac{1}{2}$$

Variante: die Höhe des Tetraeders ist gleich dem Abstand des Punktes D von der Ebene E:

$$\frac{6 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + 1 + 8}{\sqrt{36 + 16 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{53}}$$

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{53}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{53}} = \frac{1}{2}$$