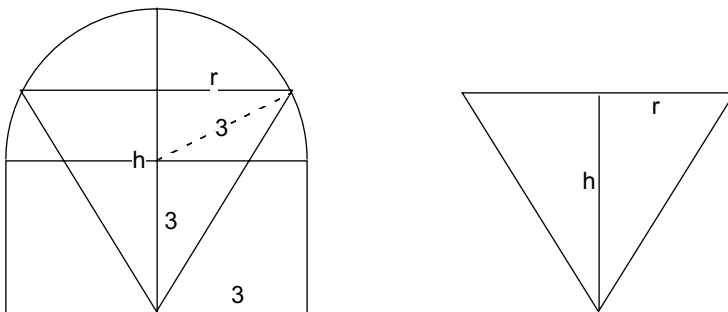


Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiszylinder mit aufgesetzter Halbkugel. Zylinderradius und -höhe und Radius der Halbkugel haben je die Länge 3. Diesem Körper wird ein gerader Kreiskegel einbeschrieben mit der Spitze im Mittelpunkt der Zylinderstandfläche und dem Grundkreis auf der Kugeloberfläche.

- Bestimmen Sie die Höhe des Kreiskegels mit maximalem Volumen.
- Bestimmen Sie die Höhe des Kreiskegels mit maximaler Mantelfläche.

Der Kegel habe die Höhe  $h$  und den Grundkreisradius  $r$ .

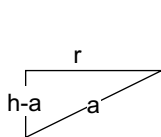


### AUFGABE a): MAXIMALES VOLUMEN

Die Hauptfunktion berechnet das Volumen des Kegels, das extremal werden soll:  $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

Das ist hier eine Funktion von zwei Variablen, nämlich  $r$  und  $h$ . Wir benötigen eine Nebenbedingung, um die eine der beiden Variablen wegzuschaffen:

Wir entnehmen der Figur das folgende Dreieck und erhalten:



$$r^2 + (h - 3)^2 = 9$$

Diese Gleichung lässt sich sehr viel einfacher nach  $r^2$  als nach  $h$  auflösen:

$$\begin{aligned} r^2 &= 9 - (h^2 - 6h + 9) \\ &= 6h - h^2 \end{aligned}$$

**TIPP:** Es lohnt sich, wenn man genau überlegt, welche Variable einfacher zu eliminieren ist! (für  $h$  gälte:  $h = \sqrt{9 - r^2} + 3$ )

Wir setzen  $r^2$  in der Hauptfunktion ein und erhalten:  $V = \frac{\pi}{3}(6h - h^2) \cdot h = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$   
Von dieser Funktion ist das Maximum zu bestimmen; wir leiten nach  $h$  ab und setzen das Ergebnis  $= 0$ .

$$V' = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (12 - 3h) = 0$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen:  $h = 0$  mit  $V = 0$  (Minimum)

$$h = 4, r = 2\sqrt{2} \text{ und } V = \frac{32\pi}{3}$$

### **AUFGABE b): MAXIMALE MANTELFLÄCHE**

Die Hauptfunktion berechnet die Mantelfläche des Kegels, die extremal werden soll:

$$M = \pi r s \quad \text{wobei} \quad s^2 = r^2 + h^2$$

Bei dieser Funktion lässt sich die Wurzel beim eliminieren nicht vermeiden.

---

**TIPP:** Wenn eine Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  extremal ist, dann ist auch  $f^2$  an dieser Stelle extremal.

---

Wir wählen also als Hauptfunktion:  $M^2 = \pi^2 r^2 s^2$

Wir benötigen zwei Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} r^2 &= 6h - h^2 \quad (\text{s. 1. Seite}) \\ s^2 &= h^2 + r^2 = h^2 + 6h - h^2 = 6h \end{aligned}$$

Wir setzen beides in der Hauptfunktion ein und erhalten:

$$M^2 = \pi^2 \cdot (6h - h^2) \cdot 6h = 6\pi^2 \cdot (6h^2 - h^3)$$

wir leiten nach  $h$  ab und setzen das Ergebnis  $= 0$ .

$$(M^2)' = 6\pi^2 \cdot (12h - 3h^2) = 6\pi^2 \cdot h \cdot (12 - 3h) = 0$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen:  $h = 0$  mit  $M = 0$  (Minimum)

$$\mathbf{h = 4}$$