[Eidg. Matur Basel, Herbst 76]

Zwei verschiedene Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ haben dieselbe 2. Ableitung $f_1''(x) = f_2''(x) = \frac{3x}{16} - 1$.

Ihre Graphen gehen beide durch den Ursprung des Koordinatensystems und berühren beide die x-Achse.

a) Wie lauten die Funktionen f_1 undf$_2$?

b) Stellen Sie die beiden Funktionen im gleichen Koordinatensystem mit Hilfe der Extrem- und Wendepunkte dar (Einheit: 1 Häuschen).

c) Welchen Inhalt hat das von den beiden Graphen und von der Geraden mit der Gleichung $x = 8$ eingeschlossene Flächenstück ?

---

a) Bestimmung der beiden Funktionen:

$$f''(x) = \frac{3x}{16} - 1$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{32} - x + a$$

$$f(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + ax + b$$

Bei Integrale, die nicht für die Flächenberechnung verwendet werden, darf man aif die Konstanten (a und b) keineswegs verzichten.

Graph geht durch den Ursprung: $b = 0$

Eine Funktion, deren Graph die x-Achse berührt, muss an dieser Stelle eine doppelte Nullstelle haben!

$$\frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + ax = 0$$

$$x^3 - 16x^2 + 32ax = 0$$

$$x\,(x^2 - 16x + 32a) = 0$$

1. Variante: Doppellösung für $x = 0$; dann ist $a = 0$ und $\mathbf{f_1(x)} = \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{32}} - \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}}$

2. Variante: Der Klammerausdruck liefert die Doppellösung;

$x^2 - 16x + 32a = (x-8)^2$ für $32a = 64$ und $a = 2$.

$$\mathbf{f_2(x)} = \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{32}} - \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} + \mathbf{2x}$$

b) Kurvendiskussion

$$f_1(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x-16)}{32}$$

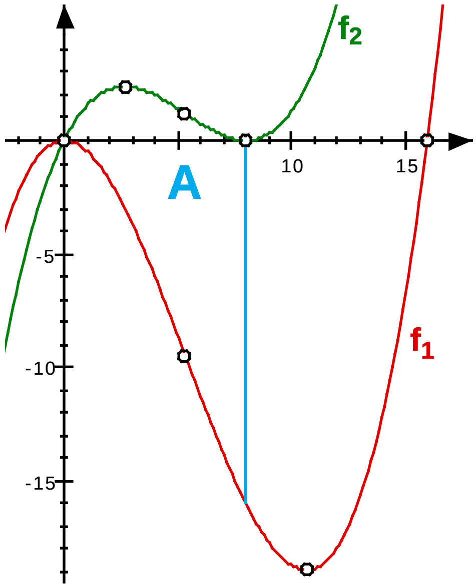
$$f_1{}' = \frac{x(3x-32)}{32}$$

$$f_1{}'' = \frac{6x-32}{32}$$

Maximum: $(0|0)$

Minimum: $\left(\frac{32}{3}\middle|-\frac{512}{27}\right)$

Wendepunkt: $\left(\frac{16}{3}\middle|-\frac{256}{27}\right)$



$$f_2(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x(x-8)^2}{32}$$

$$f_2{}' = \frac{3x^2 - 32x + 64}{32}$$

$$f_2{}'' = \frac{6x-32}{32}$$

Minimum: $(8|0)$

Maximum: $\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{64}{27}\right)$

Wendepunkt: $\left(\frac{16}{3}\middle|\frac{32}{27}\right)$

c) Flächenberechnung:

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + 2x - \left(\frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2}\right) = 2x$$

$$A = \int_0^8 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^8 = 64$$