[Kanti Frauenfeld 78, Wb]
Welche ganze rationale Funktion erfüllt die drei folgenden Bedingungen?

a) $f(x) = \left[f'(x)\right]^2$

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{19}{12}$

c) $f'(0) < 0$

---

a) Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn die Funktion quadratisch ist.

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

dann ist: $f'(x) = 2ax + b$ und $f'(x)^2 = (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$

Die Gegenüberstellung $ax^2 + bx + c = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$ ergibt:

$a = 4a^2$ $\Rightarrow$ $a = \frac{1}{4}$ ($a = 0$ ist unbrauchbar)

$b = 4ab$ stimmt sicher, wenn $a = \frac{1}{4}$

$c = b^2$

Die Funktion lässt sich schreiben als: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2$

b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\tfrac{1}{4}x^2 + bx + b^2\right)dx = \left[\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{2}bx^2 + b^2x\right]_0^1$

$$\frac{1}{12} + \frac{b}{2} + b^2 = \frac{19}{20}$$

$$2b^2 + b - 3 = 0$$

Lösungen: $b_1 = 1$ $\qquad$ $b_2 = -1.5$

$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1.5x + 2.25$

c) Wir leiten beide Funktionen ab und prüfen ihren Wert an der Stelle $x = 0$

$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

$f_1'(x) = \frac{1}{2}x + 1$

$f_1'(0) = 1$

$f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1.5x + 2.25$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x - 1.5$

$f_2(0) = -1.5$

Damit bleibt: $\mathbf{f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1.5x + 2.25}$