p: $f(x) = -0.1(x^2 + 10x - 39)$

Die Parabel p und das Trapez ABCD sind gegeben. A ist der Koordinatenursprung, B die positive Nullstelle der Parabel; C ist ein beliebiger Parabelpunkt im 1. Quadranten, D der zugehörige Punkt auf der y-Achse.

a) Wie gross kann der Winkel CBA unter diesen Umständen sein?

b) Bestimmen Sie C so, dass das Trapez ABCD maximalen Flächeninhalt hat.

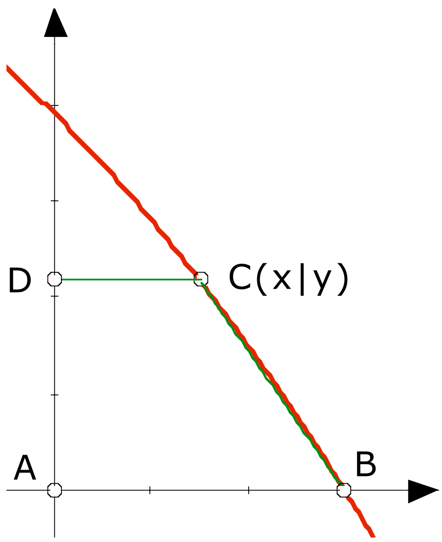
(Maturaufgabe)

Der Winkel CBA

Der Winkel ist am grössten, wenn C gerade auf B liegt.
In dem Fall gilt:

$$\tan\beta = |\, f'(3)\,| = |\, -1.6\,|$$

$$\beta = 58.0^\circ \qquad \left(f'(x) = -0.1(2x + 10) \right)$$



Der Winkel ist am kleinsten, wenn C im Achsenabschnitt der Kurve liegt, also in $(0\,|\,3.9)$:

$$\tan\beta = \frac{3.9}{3} = 1.3$$

$$\beta = 52.43^\circ$$

Maximale Fläche

$$A(x) = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{3+x}{2} \cdot y = \frac{3+x}{2} \cdot \left(-0.1(x^2 + 10x - 39)\right)$$

$$= -0.05(x^3 + 13x^2 - 9x - 47)$$

$$A'(x) = -0.05(3x^2 + 26x - 9) = 0$$

Einzige brauchbare Lösung: $x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{32}{9}$ $\qquad$ $\mathbf{C\left(\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{32}{9}\right)}$

$$A''(x) = -0.05(6x + 26)$$

$$A''\left(\tfrac{1}{3}\right) = -0.05(2 + 26) < 0 \quad \text{Maximum}$$