$y = 2\sqrt{x} - x$

a) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch

b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von der Kurve und der x-Achse eingeschlossen wird.

c) Berechnen Sie das Rotationsvolumen dieser Fläche

Definitionsbereich: $D = \left[0\,;\infty\right[$

Nullstellen:

$$2\sqrt{x} - x = 0$$
$$2\sqrt{x} = x$$
$$4x = x^2$$
$$0 = x^2 - 4x = x\,(x-4) \qquad \Rightarrow \quad x = 0 \;\text{ und }\; x = 4$$

Ableitungen:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Extremum: $1 = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 1 = x \quad \Rightarrow \quad M(1|1)$

Wendepunkte: keine

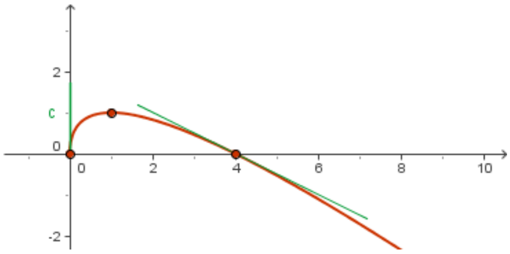
Verhalten am Rand von D: im Nullpunkt: für $x \to 0$ geht $y' \to \infty$

Die Tangente ist senkrecht

für $x \to \infty$ geht $y \to -\infty$

Steigung in (4|0): $f'(4) = -0.5$

Graph:



Flächenstück:

$$A = \int_0^4 (2x^{0.5} - x)\,dx = \left[\frac{4x^{1.5}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4 \cdot 4^{1.5}}{3} - \frac{16}{2} = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}$$

Rotationsvolumen:

$$y^2 = \left(2\sqrt{x} - x\right)^2 = 4x - 4x\sqrt{x} + x^2 = x^2 + 4x - 4x^{1.5}$$

$$V = \pi\int_0^4 (x^2 + 4x - 4x^{1.5})\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - \frac{8x^{2.5}}{5}\right]_0^4 = \left(\frac{64}{3} + 32 - \frac{256}{5}\right)\pi = \frac{32\pi}{15}$$