Alle Ergebnisse sind exakt anzugeben!

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)=\ln(x^2+0.25)$.
(Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen)

b) Geben Sie die Gleichung einer Wendetangente an.

c) Bestimmen Sie in der Funktion $f(x)=\ln(ax^2+b)$ die Parameter a und b so, dass die Funktion bei x=1 und y=-ln5 die Achsen schneidet.

[Matur TSME 2001, Flü]

---

a) $f(x) = \ln(x^2 + 0.25)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 0.25} \cdot 2x = \frac{8x}{4x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{8(4x^2 + 1) - 8x \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{8(1 - 4x^2)}{(4x^2 + 1)^2}$$

Überall definiert ($x^2 \geq 0$): $D = \mathbb{R}$

Nullstellen: $x^2 + 0.25 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad P\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{4} \mid 0\right)$

Extremum: $(0 \mid \ln 0.25) = (0 \mid -\ln 4)$

$\Rightarrow$ Wendepunkte: $1 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad (\pm 0.5 \mid -\ln 2)$

Verhalten im Unendlichen: $x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad y \to +\infty$

b) Die Steigung in $(0.5 \mid -\ln 2)$ ist: $f'(0.5) = 2$:

$$y + \ln 2 = 2(x - 0.5) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1 - \ln 2$$

c)
$$\begin{matrix} x = 1 & y = 0 \\ y = 0 & y = -\ln 5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{matrix} 0 = \ln(a + b) \\ -\ln 5 = \ln b \end{matrix} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{matrix} a + b = 1 \\ b = 0.2 \end{matrix} \right| \quad \Rightarrow \quad a = 0.8$$

$$y = \ln(0.8x^2 + 0.2) = \ln\left(\frac{4x^2 + 1}{5}\right)$$