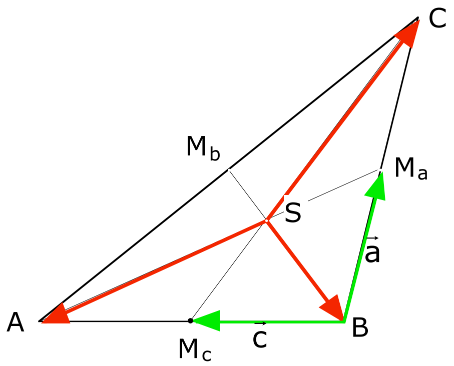
Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck ABC mit dem Schwerpunkt S gilt: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.



Etwas Elementargeometrie:

Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Schwerelinien oder Seitenhalbierenden.

Der Schwerpunkt teilt die Schwerelinien im Verhältnis 1 : 2.

Um das Bruchrechnen etwas einfacher zu gestalten, bezeichne ich die halben Seitenvektoren mit $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Damit ist auch das Dreieck bestimmt.

Nun lässt sich aus der Figur ablesen:

$$\overrightarrow{M_aA} = -\vec{a} + 2\vec{c} \qquad \overrightarrow{SA} = \frac{2}{3}(-\vec{a} + 2\vec{c}) \qquad 1)$$

$$\overrightarrow{M_cC} = -\vec{c} + 2\vec{a} \qquad \overrightarrow{SC} = \frac{2}{3}(-\vec{c} + 2\vec{a}) \qquad 2)$$

und – weil $\overrightarrow{AB} = -2\vec{c} + 2\vec{a}$ -

$$\overrightarrow{M_bB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\vec{c}$$

$$= -\frac{1}{2}(-2\vec{c} + 2\vec{a}) - 2\vec{c}$$

$$= \vec{c} - \vec{a} - 2\vec{c}$$

$$= -\vec{a} - \vec{c} \qquad \overrightarrow{SB} = \frac{2}{3}(-\vec{a} - \vec{c}) \qquad 3)$$

Aus 1), 2) und 3) ergibt sich:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \frac{2}{3}(-\vec{a} + 2\vec{c}) + \frac{2}{3}(-\vec{a} - \vec{c}) + \frac{2}{3}(-\vec{c} + 2\vec{a})$$

$$= \frac{2}{3}(-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{a} - \vec{c} - \vec{c} + 2\vec{a}) = \vec{0} \quad \textbf{!}$$