

Das Dreieck ABC mit A(1|10|2), B(-1|3|1) und C(-2|0|6) ist gegeben.

Bestimmen Sie die Spurpunkte der Seitengeraden mit der xy-Ebene und zeigen Sie, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Gerade BC=a Richtungsvektor: $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Geradengleichung: a: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der xy-Ebene: $z = 0 = 1 + 5t \Rightarrow t = -0.2$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 3.6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_a(-0.8|3.6|0)$$

Gerade AC=b Richtungsvektor: $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

Geradengleichung: a: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der xy-Ebene: $z = 0 = 2 + 4t \Rightarrow t = -0.5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} - 0.5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_b(2.5|15|0)$$

Gerade AB=c Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geradengleichung: $a: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der xy-Ebene: $z = 0 = 2 + t \Rightarrow t = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_c(-3|-4|0)$$

Die drei Punkte S_a , S_b und S_c liegen auf einer Geraden, wenn $\overrightarrow{S_a S_c}$ und $\overrightarrow{S_a S_b}$ parallel sind.

$$\overrightarrow{S_a S_c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.8 \\ 3.6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ -7.6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{S_a S_b} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.8 \\ 3.6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 11.4 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \overrightarrow{S_a S_b} = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \overrightarrow{S_a S_c}$$