

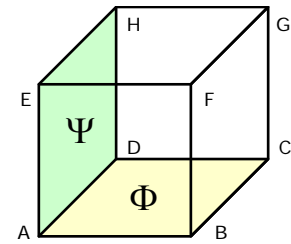
[TSME, Matur BDE, 1997 - FlÜ]

Von einem Würfel kennt man:

die Ebene ABCD: $\phi: 2x - y - 2z - 5 = 0$

die Ebene ADEH: $\Psi: 2x + 2y + z + 4 = 0$

sowie den Punkt F (1|0|3).



- Berechnen Sie die Parametergleichung der Schnittgeraden von Φ und Ψ .
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene ABFE.
- Wie lautet die Gleichung der Ebene CDHG?

a) 1. Art:

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{r}_{\phi} \times \vec{r}_{\psi} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ein gemeinsamer Punkt, z. B. für } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -3, \quad x = 1$$

$$\text{Schnittgerade: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Art:

Wir setzen $z = 0$ und lösen das System $\begin{cases} 2x - y - 2t - 5 = 0 \\ 2x + 2y + t + 4 = 0 \end{cases}$ nach x und y auf:

$$(2) - (1) \text{ ergibt: } 3y + 3t + 9 = 0 \Rightarrow y = -3 - t$$

$$2 \cdot (1) + (2) \text{ ergibt: } 6x - 3t - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 + 0.5t$$

$$\text{Damit haben wir: } \begin{matrix} x = 2 + 0.5t \\ y = -3 - t \\ z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Art:

Einen 2. gemeinsamen Punkt der Ebenen bestimmen z. B. $y = 0 \Rightarrow z = -1, \quad x = -1.5$ und aus den beiden Punkten die Geradengleichung bestimmen.

- b) Die gesuchte Ebene steht senkrecht auf Φ und Ψ , d.h. ihr Normalenvektor steht senkrecht auf den Normalenvektoren von Φ und Ψ .

Das haben wir unter a) berechnet: $\vec{n}_\Phi \times \vec{n}_\Psi = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Ebenengleichung hat die Form: $x - 2y + 2z =$ und geht durch $F(1|0|3)$:

Gleichung der Ebene ABFE: $x - 2y + 2z = 7$

- c) Die Ebene ist parallel zur eben berechneten; ihr Abstand entspricht der Länge einer Würfelkante; diese können wir auf zwei Arten berechnen:

Abstand des Punktes F von Φ
 Abstand des Punktes F von Ψ

$\phi: 2x - y - 2z - 5 = 0$ und $F(1|0|3)$:

Formel von Hesse: $\left| \frac{2 \cdot 1 - 0 - 2 \cdot 3 - 5}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \right| = \frac{9}{3} = 3$

Parallelebenen zu ABFE: $x - 2y + 2z = 7$ im Abstand ± 3 :

$$\frac{x - 2y + 2z - 7}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \pm 3 \Rightarrow x - 2y + 2z - 7 = \pm 9$$

Es sind zwei Lösungen möglich: $x - 2y + 2z = 16$
 $x - 2y + 2z = -2$