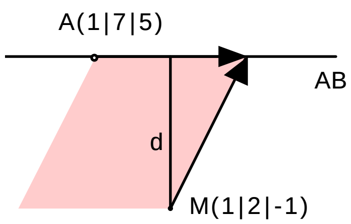
Eine Kugel mit Mittelpunkt M(1|2|-1) und Radius r=3 ist undurchsichtig. Können sich die Punkte A(1|7|5) und B(5|-5|-11) gegenseitig sehen?
[Matur TSME 02, Aufgabe 2b]

Gleichung der Geraden AB: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Es gibt zwei Möglichkeiten die Aufgabe zu lösen:

1. Wir bestimmen den Abstand des Mittelpunktes von der Geraden AB:

Fläche des Parallelogramms: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$



$A = \sqrt{4+36+25} = \sqrt{65}$

Grundlinie des Parallelogramms: $\sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

Der Abstand $\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{26}}$ ist kleiner als der Kugelradius 3, die Punkte sehen sich nicht.

2. Wir prüfen, ob sich Kugel und Gerade schneiden:

Kugelgleichung: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Koordinaten aus der Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} (1-t-1)^2 + (7+3t-2)^2 + (5+4t+1)^2 &= 9 \\ (-t)^2 + (5+3t)^2 + (6+4t)^2 &= 9 \\ 26t^2 + 78t + 52 &= 0 \\ t^2 + 3t + 2 &= 0 \\ (t+2)(t+1) &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Schnittpunkte, die Gerade durchstösst die Kugel.