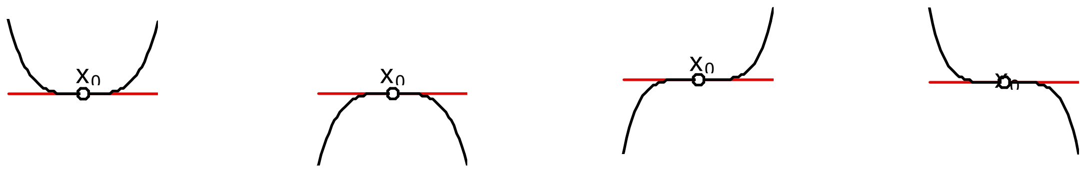
MAXIMUM ODER MINIMUM?

Die in der Formelsammlung stehenden Kriterien sind nicht zu empfehlen:

- Sie liefern, gerade bei Polynomfunktionen, falsche Resultate
  Beispiele dazu auf der Rückseite
- Ableitungen werden mitnichten immer einfacher, und ihre Herleitung ist entsprechend fehleranfällig.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = \frac{-48x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}$$

Im folgenden betrachten wir die möglichen vier Ergebnisse für $f'(x_0) = 0$:



$f(x)$ ist in unmittelbarer Nähe von x_0 auf beiden Seiten grösser als $f(x_0)$.

Die Kurve fällt links und steigt rechts:

$f'(x_0 - h) < 0$
$f'(x_0 + h) > 0$

wenn h eine kleine positive Zahl ist.

$f(x)$ ist in unmittelbarer Nähe von x_0 auf beiden Seiten kleiner als $f(x_0)$.

Die Kurve steigt links und fällt rechts:

$f'(x_0 - h) > 0$
$f'(x_0 + h) < 0$

wenn h eine kleine positive Zahl ist.

$f(x)$ ist in unmittelbarer Nähe von x_0 auf beiden Seiten grösser als $f(x_0)$.

Die Kurve steigt links und steigt rechts:

$f'(x_0 - h) > 0$
$f'(x_0 + h) > 0$

wenn h eine kleine positive Zahl ist.

$f(x)$ ist in unmittelbarer Nähe von x_0 auf beiden Seiten grösser als $f(x_0)$.

Die Kurve fällt links und fällt rechts:

$f'(x_0 - h) < 0$
$f'(x_0 + h) < 0$

wenn h eine kleine positive Zahl ist.

Die zweite Methode ist wesentlich einfacher (rechnen Sie es selber!):

ein Beispiel: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 3$
$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 108x - 108 = 4(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$

Es ist: $f'(3) = 0$, wir haben also an dieser Stelle eine waagrechte Tangente.

1. Methode: $f(3) = 81 - 324 + 486 - 324 + 3 = -78$
$f(2) = 16 - 96 + 216 - 216 + 3 = -77$
$f(4) = 256 - 768 + 864 - 432 + 3 = -77$

2. Methode: $f'(2) = 4(8 - 36 + 54 - 27) = -4 < 0$ fallend
$f'(4) = 4(64 - 144 + 108 - 27 = 4 > 0$ steigend $\Rightarrow$ lokales Minimum

Kriterien der Formelsammlung:

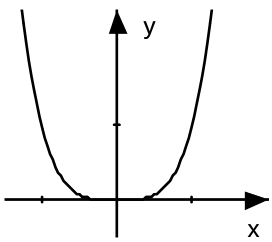
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ / $f''(x_0) < 0$ ist hinreichend für lokales Minimum / lokales Maximum

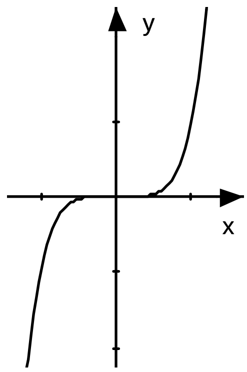
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ Terrassen- oder Sattelpunkt

Zwei durchsichtige Beispiele:

$f'(x) = x^4$	$f'(0) = 0$	$f'(x) = x^5$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = 4x^3$	$f''(0) = 0$	$f''(x) = 5x^4$	$f''(0) = 0$
		$f'''(x) = 20x^3$	$f'''(x) = 0$

. . . laut Bild ein Minimum! . . . und trotzdem ein Sattelpunkt!





und zurück zum Beispiel der vorderen Seite:

$f''(x) = 4\,(3x^2 - 18x + 27) = 12\,(x^2 - 6x + 9) \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 0$

$f'''(x) = 12\,(2x - 6) \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 0$

und was ist es nun? Die Kriterien der Formelsammlung lassen uns im Stich!