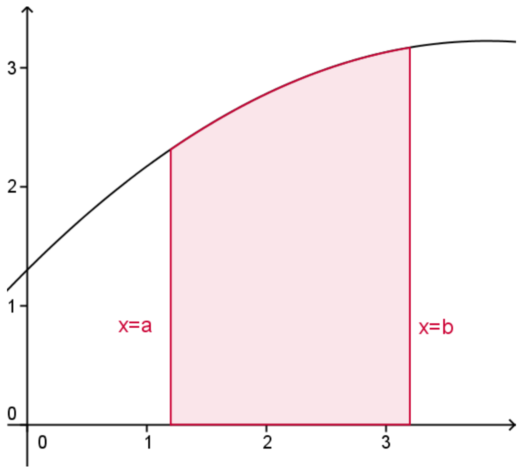
FLÄCHENBERECHNUNG

Integrale können zur Flächenberechnung verwendet werden, der Beweis dafür folgt später (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).



Die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$,
die Geraden $x = a$ und $x = b$,
sowie die x-Achse
schliessen eine Fläche mit dem
Inhalt A ein

Es gilt:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ heisst: bestimmtes Integral

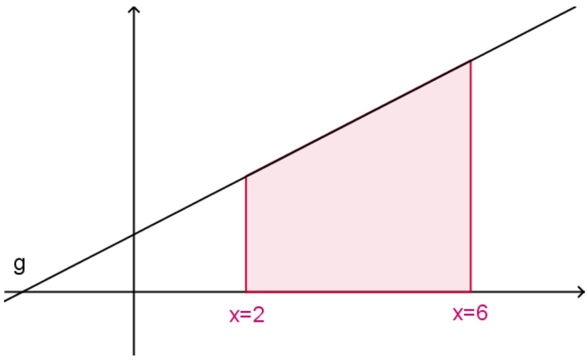
$f(x)$ ist der Integrand

a ist die untere (linke) Grenze, b ist die obere (rechte) Grenze

Bei dieser Anwendung darf man die Konstante c bei der Stammfunktion weglassen (sie wird durch die Subtraktion ohnehin neutralisiert.).

MUSTERAUFGABE 1

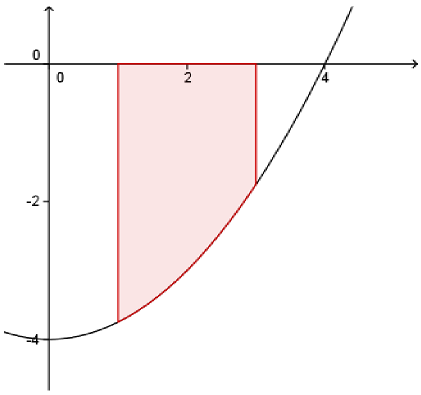
$$y = \frac{x}{2} + 1$$



$$A = \int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_2^6 = \left(\frac{6^2}{4} + 6\right) - \left(\frac{2^2}{4} + 2\right) = 15 - 3 = 12$$

MUSTERAUFGABE 2

$$y = \frac{x^2}{4} - 4$$



$$\int_1^3 \left(\frac{x^2}{4} - 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{12} - 4x\right]_1^3 = \left(\frac{27}{12} - 12\right) - \left(\frac{1}{12} - 4\right) = \frac{26}{12} - 8 = -5\frac{5}{6}$$

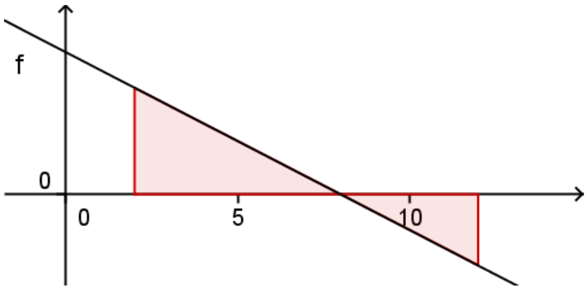
Das zu berechnende Flächenstück liegt unterhalb der x-Achse;

Das Integral wird negativ; für den Flächeninhalt gilt: $A = 5\frac{5}{6}$

ACHTUNG FALLE! Wenn die zu berechnende Fläche teils oberhalb teils unterhalb der x-Achse liegt, sind die Flächenstücke einzeln zu berechnen!

MUSTERAUFGABE 3

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$



Schnitt mit der x-Achse bei $x = 8$

$$A_1 = \int_2^8 \left(-\frac{x}{2} + 4\right) dx = \left[-\frac{x^2}{4} + 4x\right]_2^8 = (-16 + 32) - (-1 + 8) = 16 - 7 = 9$$

$$A_2 = \int_8^{12} \left(-\frac{x}{2} + 4\right) dx = \left[-\frac{x^2}{4} + 4x\right]_8^{12} = (-36 + 48) - (-16 + 32) = 12 - 16 = -4$$

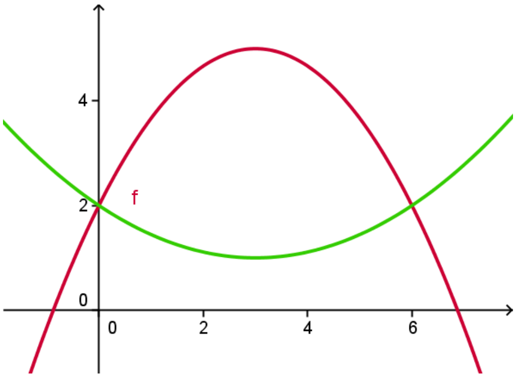
$$A = 9 + |-4| = 13$$

MUSTERAUFGABE 4

Es sind zwei Funktionen gegeben:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 6x + 6}{3}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 6x + 18}{9}$$



Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die von den zwei Kurven eingeschlossen wird.

Es gilt:

$$\boxed{A = \int_a^b \left(f(x)\right) dx - \int_a^b \left(g(x)\right) dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx}$$

Zuerst müssen die Schnittpunkte berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 + 6x + 6}{3} &= \frac{x^2 - 6x + 18}{9} \qquad \Big|\cdot 9 \\ -3x^2 + 18x + 18 &= x^2 - 6x + 18 \\ 0 &= 4x^2 - 24x = 4x(x-6) \\ x_1 &= 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 6 \end{aligned}$$

Ausserdem ist: $f(x) - g(x) = \frac{-x^2 + 6x + 6}{3} - \frac{x^2 - 6x + 18}{9} = \frac{-4x^2 + 24x}{9}$

$$A = \tfrac{1}{9}\int_0^6 (-4x^2 + 24x)\, dx = \tfrac{1}{9}\left[-\frac{4}{3}x^3 + 12x^2\right]_0^6 = 16$$

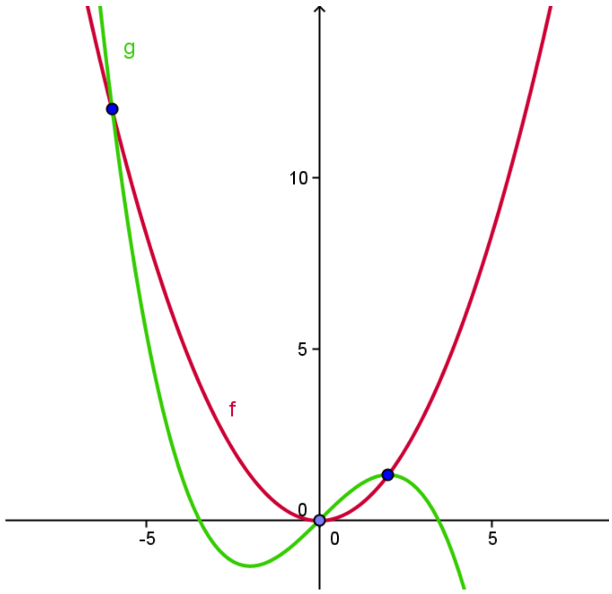
Beim Flächen zwischen zwei Kurven muss nicht auf Schnittpunkte mit der x-Achse geachtet werden.

Angenommen, die Fläche zwischen den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ werde von der x-Achse geschnitten. Wir verschieben beide Kurven um die gleiche Strecke a genügend weit nach oben, d.h. bis die Fläche oberhalb der x-Achse liegt:

$\bar{f}(x) = f(x) + a$
$\bar{g}(x) = g(x) + a$

dann gilt : $\bar{f}(x) - \bar{g}(x) = \left(f(x) + a\right) - \left(g(x) + a\right) = f(x) - g(x)$

ACHTUNG FALLE! Wenn die beiden Kurven mehr als ein Flächenstück umschliessen, dann sind die Flächenstücke einzeln zu berechnen!



Die beiden Funktionen schneiden sich bei

$x_1 = -6$

$x_2 = 0$

$x_3 = 2$

Das Integral $\int_{-6}^{0} \left(f(x) - g(x)\right) dx$ wird positiv

Das Integral $\int_{0}^{2} \left(f(x) - g(x)\right) dx$ wird negativ,

da $f(x)$ unterhalb von $g(x)$ liegt.