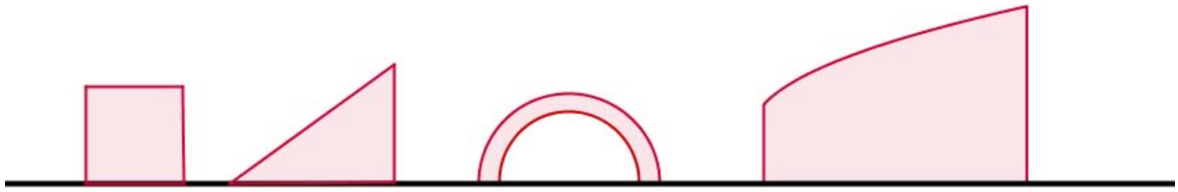
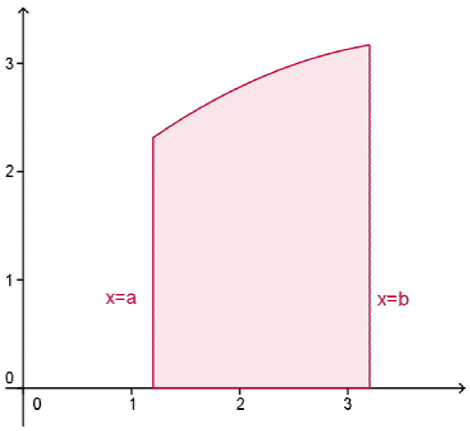
ROTATIONSVOLUMINA

Wenn wir die folgenden Flächen um die x-Achse rotieren lassen, entstehen sogenannte Rotationskörper.



Die ersten drei Körper können wir benennen und mit elementargeometrischen Formeln berechnen (Zylinder, Kegel, Hohlkugel). Die Randlinie des letzten Körpers wird durch eine Funktionsgleichung beschrieben und das Volumen kann in gewissen Fällen mit Hilfe der Integralrechnung berechnet werden.

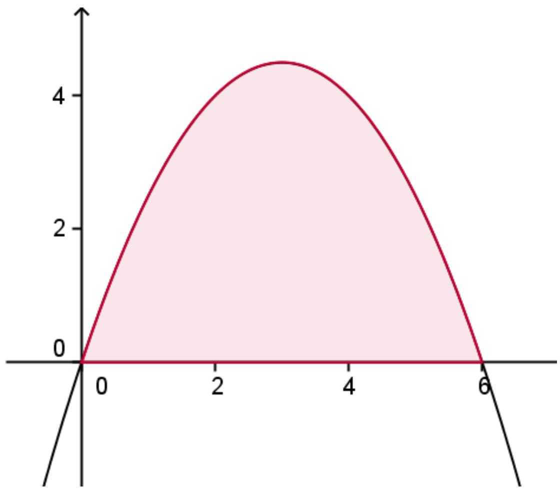


Nebenstehende Fläche ergibt bei Rotation um die x-Achse einen einem Kegelstumpf ähnlichen Körper. Wir berechnen sein Volumen näherungsweise, indem wir ihn – senkrecht zur Achse – in Scheiben schneiden. Diese Scheiben sind ungefähr zylinderförmig. Der Radius eines solchen Zylinders entspricht dem y-Wert der Funktion an dieser Stelle, die Höhe ist gleich der Differenz zweier x-Werte Δx.
Das ergibt für das Volumen einer Scheibe:
$V = \pi \cdot y^2 \cdot \Delta x$.
Wenn wir alle diese Scheiben summieren erhalten wir das Volumen unseres Körpers, und zwar umso genauer, je kleiner Δx gewählt wird.

$V = \sum \pi \cdot y^2 \cdot \Delta x$ wird zu: $V = \int_a^b (\pi \cdot y^2)\, dx = V = \pi \int_a^b y^2\, dx$

MUSTERAUFGABE 1

$$y = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 6x\right)$$



Das gezeichnete Flächenstück rotiert um die x-Achse und das Volumen des entstehenden Rotationskörpers soll berechnet werden.

Vorarbeiten:

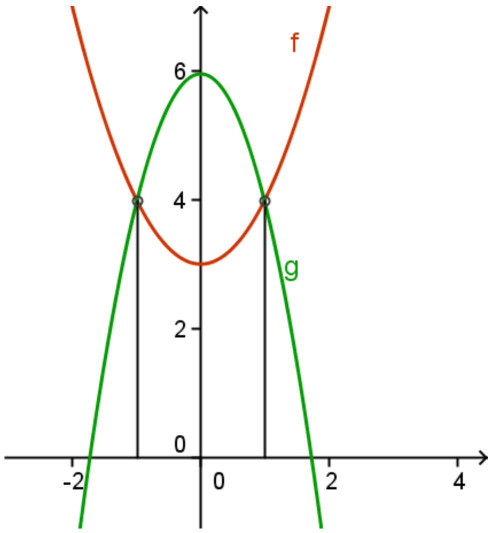
$$y^2 = \left(-\frac{1}{2}\left(x^2 - 6x\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x^4 - 12x^3 + 36x^2\right)$$

Achsenschnittpunkte: $-\frac{1}{2}\left(x^2 - 6x\right) = -\frac{1}{2}x\left(x - 6\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 6$

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^6 (x^4 - 12x^3 + 36x^2)\,dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^5}{5} - 3x^4 + 12x^3\right]_0^6 = \frac{\pi}{4}\cdot 259.2 = 64.8\pi$$

MUSTERAUFGABE 2

$$f(x) = x^2 + 3$$
$$g(x) = -2x^2 + 6$$



Die Fläche zwischen den Kurven rotiert um die x-Achse.
Man berechne das Volumen des Rotationskörpers.

Schnitt:

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= -2x^2 + 6 \\ 3x^2 &= 3 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

$$V = V_g - V_f = \pi \int_a^b (g(x))^2\,dx - \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx = \pi \int_a^b \left((g(x))^2 - (f(x))^2 \right) dx$$

Wir rechnen vorweg:

$$\begin{aligned} (g(x))^2 &= \left(-2x^2 + 6\right)^2 = 4x^4 - 24x^2 + 36 \\ (f(x))^2 &= \left(x^2 + 3\right)^2 = x^4 + 6x^2 + 9 \\ (g(x))^2 - (f(x))^2 &= 3x^4 - 30x^2 + 27 \end{aligned}$$

und machen Gebrauch von der Achsensymmetrie:

$$V = 2\pi \int_0^1 (3x^4 - 30x^2 + 27)\,dx = 2\pi \left[\frac{3x^5}{5} - 10x^3 + 27x \right]_0^1 = 2\pi\left(0.6 - 10 + 27\right) - 0 = 35.2\pi$$

ACHTUNG FALLE! $\quad f^2 - g^2 \neq (f-g)^2$!