RECHNEN MIT LOGARITHMEN

$$\boxed{\begin{aligned} &\log(pq) = \log p + \log q \\ &\log \frac{p}{q} = \log p - \log q \\ &\log q^{p} = p \cdot \log q \end{aligned}}$$

speziell: $\log \frac{1}{q} = -\log q$

Achtung: die Formeln werden in beiden Richtungen verwendet (von links nach rechts und von rechts nach links).

Beweis für die 1. Formel:

Wir setzen $\log p = x$ $\quad \log q = y$

dann ist $p = 10^{x}$ $\quad q = 10^{y}$

und $p \cdot q = 10^{x} \cdot 10^{y} = 10^{x+y}$

$\log pq = x + y = \log p + \log q$

Die anderen beiden werden ähnlich hergeleitet.

Anwendungen dieser Gesetze:

- Umformen logarithmischer Ausdrücke (beispielsweise beim Lösen von Gleichungen)
- In alten Zeiten, als es noch keine Taschenrechner gab, konnte man sich Multiplikation und Division vereinfachen (die Logarithmen muss man nur addieren bzw. subtrahieren).
  Gewisse Potenzrechnungen waren nur so durchführbar.
  (Beispiel 1)
- Gewisse Rechnungen sind auf dem Taschenrechner nicht durchführbar, weil die Stellenzahl nicht ausreicht. (Beispiel 2)

Heute benötigt man Logarithmen vor allem, um gewisse Exponentialgleichungen zu lösen.
In der Analysis spielt die Logarithmusfunktion eine wichtige Rolle.

Merken Sie sich:

10^x ist die Umkehrfunktion von $\log x$

und

$\log x$ ist die Umkehrfunktion von 10^x (dasselbe gilt z. B. für x^2 und $\sqrt{x}$)

Beide Funktionen hintereinander ausgeführt neutralisieren sich:

$10^{\log x} = \log 10^x = x$ (vergleichen Sie mit: $\sqrt{x^2} = \sqrt{x}^2 = x$)

Man darf beide Seiten einer Gleichung logarithmieren:

$$a^x = b$$

$$\log a^x = \log b \quad \Rightarrow \quad x \cdot \log a = \log b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log b}{\log a}$$

Man darf auf beiden Seiten einer Gleichung die Funktion 10^x anwenden:

$$\log x = 5$$
$$x = 10^5$$

weil nach Definition: $10^{\log x} = x$

Beispiel 1

Angenommen die Multiplikationstaste auf dem TR ist defekt:
wie rechnet man $5.3842 \cdot 17.1895$?

$$\begin{aligned}
x &= 5.3842 \cdot 17.1895 \\
\log x &= \log(5.3842 \cdot 17.1895) \\
&= \log 5.3842 + \log 17.1895 \\
&= 0.73112 + 1.23526 \\
&= 1.96638 \\
x &= 10^{1.96638} \\
x &= 92.5517
\end{aligned}$$

So hat man vor Aufkommen des Taschenrechners multipliziert (und, analog, dividiert). Die Logarithmen und ihre Umkehrung bestimmte man anhand von Zahlentabellen.

Beispiel 2

Wenn Sie 3^{300} berechnen wollen, steigen die meisten Taschenrechner aus. Wir probieren es mit Logarithmen:

$$\begin{aligned}
x &= 3^{300} \\
\log x &= \log 3^{300} \\
\log x &= 300 \cdot \log 3 \\
\log x &= 143.1364 \\
x &= 10^{143.1364} \\
x &= 10^{0.1364} \cdot 10^{143} \\
x &= 1.36891474 \cdot 10^{143}
\end{aligned}$$

Übungen: Aufgabe 6

Beispiel 3

Formen Sie um: $\log(1.354 \cdot 10^6)$

$$\begin{aligned} \log(1.354 \cdot 10^6) &= \log 1.354 + \log 10^6 \\ &= \log 1.354 + 6 \cdot \log 10 \\ &= \log 1.354 + 6 \qquad \left(\text{da } \log 10 = 1\right) \end{aligned}$$

Übungen: Aufgabe 7

Beispiel 6

Man bestimme: $x = \log_4 23$

$$\begin{aligned} 4^x &= 23 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_4 23 \\ \log 4^x &= \log 23 \\ x \log 4 &= \log 23 \\ x &= \frac{\log 23}{\log 4} = 2.26178 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgabe 8

Gleichungen finden sich unter einem separaten Titel.

Alle diese Regeln und Techniken gelten auch für Logarithmen mit beliebiger Basis, insbesondere für die

natürlichen Logarithmen: $\log_e a = \ln a$, wobei $e \approx 2.71828$ (Eulersche Zahl)