FUNKTIONEN: BEGRIFFE UND EIGENSCHAFTEN

DEFINITION

Eine Funktion ist Vorschrift, die jedem erlaubten x-Wert (unabhängige Variable) genau einen y-Wert (abhängige Variable) zuordnet.

Eindeutig: jeder Zahl wird ihre Quadratzahl zugeordnet: $x \mapsto x^2 \quad 3 \mapsto 9$
Nicht eindeutig: jeder Zahl wird ihre Wurzel zugeordnet: $9 \mapsto 3$ *oder* $9 \mapsto -3$

SCHREIB- UND SPRECHWEISEN

f; g; A; . . .	sind Bezeichnungen für Funktionen
f(x) lies: f von x	bezeichnet diejenige Zahl, die f der Zahl x zuordnet. Man nennt sie **Funktionswert von x** oder: **Funktionswert von f an der Stelle x**.
$f\colon x \mapsto x^2$	drückt aus, dass mit f die Vorschrift "jedem x wird x^2 zugeordnet" gemeint ist. Man nennt x^2 den **Funktionsterm**.
Graf von f	sind alle Punkte P(x|y), welche die Gleichung $y = f(x)$ oder $y = x^2$ erfüllen. $y = f(x)$ oder $y = x^2$ heisst Gleichung des Grafen.

Funktionstypen

Konstante Funktion

Ganzrationale Funktionen Polynomfunktionen	$y = ax + b$	(lineare Fkt.)
	$y = ax^2 + bx + c$	(quadratische Fkt.)
	$y = -3x^4 + 2x$	(Fkt. 4. Grades)
	$y = \frac{3x + 5x^6}{2}$	(Fkt. 6. Grades)
Gebrochenrationale Funktionen	$y = \frac{3x^5 - 2}{x + 1}$	
	$y = \frac{1}{x^2}$	
Wurzelfunktionen	$y = x \cdot \sqrt{x}$	
	$y = \sqrt{3x^3 + 5x}$	
Trigonometrische Funktionen	$y = \sin x$	
	$y = \cos x$	
	$y = \tan x$	
Exponentialfunktionen	$y = e^x$	
	$y = 2^{-x^2}$	
Logarithmusfunktionen	$y = \log x$	
	$y = \ln x$	

DEFINITIONSMENGE D_f

D_f oder einfach D ist die Bezeichnung für die Definitionsmenge.
Man bezeichnet damit die Menge aller x-Werte, für die die Funktion f angewendet werden soll (oder kann).

Oft besteht die Definitionsmenge aus der Menge der reellen Zahlen: $D_f = \mathbb{R}$.

Einzelne Zahlen kann man mit der Differenzmenge ausschliessen:

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2,3\}$ (alle reellen Zahlen ohne –2 und 3)

Spezielle Intervalle:

$\mathbb{R}^+ = \left]0,\infty\right[= \{x \mid x > 0\}$ (positive reelle Zahlen)

$\mathbb{R}_0^+ = \left[0,\infty\right[= \{x \mid x \geq 0\}$ (positive reelle Zahlen und Null)

$\mathbb{R}^- = \left]-\infty,0\right[= \{x \mid x < 0\}$ (negative reelle Zahlen)

$\mathbb{R}_0^- = \left]-\infty,0\right] = \{x \mid x \leq 0\}$ (negative reelle Zahlen und Null)

Es kommen auch andere Intervalle vor: $y = \sqrt{9 - x^2}$ ist definiert für $\left[-3,3\right]$.

Manchmal werden für offene Intervalle auch runde Klammern benützt

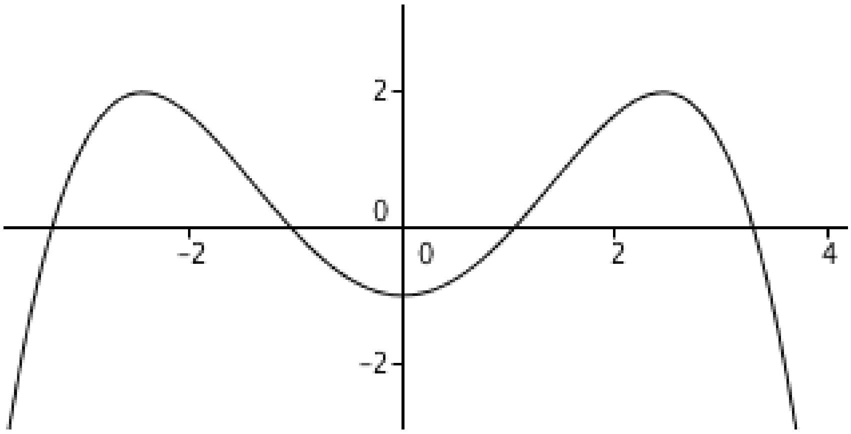
$(a,b) = \left]a,b\right[\qquad \left(a,b\right] = \left]a,b\right] \qquad \left[a,b\right) = \left[a,b\right[$

WERTEMENGE W_f

W_f oder einfach W ist die Bezeichnung für die Wertemenge. Man bezeichnet damit die Menge aller Funktionswerte (y-Werte).

GERADE FUNKTIONEN

Gerade Funktionen sind symmetrisch zur y-Achse.



Bei symmetrischen Punkten ist der y-Wert je gleich,
der x-Wert unterscheidet sich nur im Vorzeichen.

Wenn man in einer achsensymmetrischen Funktion x-Werte einsetzt, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so erhält man gleiche y-Werte.

Das ist der Fall für: $f(x) = a$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^4$

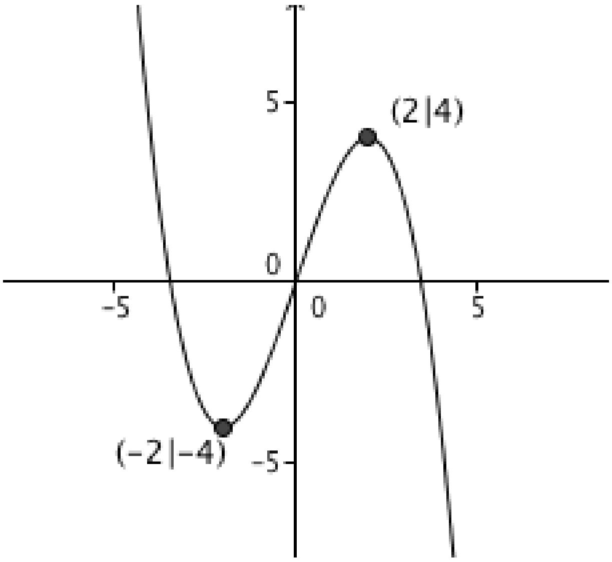
und Linearkombinationen davon:

$$f(x) = a + bx^2 + cx^4 + dx^6 + \ ...$$

aber auch bei: $f(x) = \cos x$ und $f(x) = \dfrac{5}{x^4 + 2}$

UNGERADE FUNKTIONEN

Ungerade Funktionen sind symmetrisch zum Nullpunkt.



Bei symmetrischen Punkten unterscheiden sich die x-Werte und die y-Werte je durch das Vorzeichen.

Wenn man in einer punktsymmetrischen Funktion x-Werte einsetzt, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so erhält man y-Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Das ist der Fall für: $f(x) = x$

$f(x) = x^3$

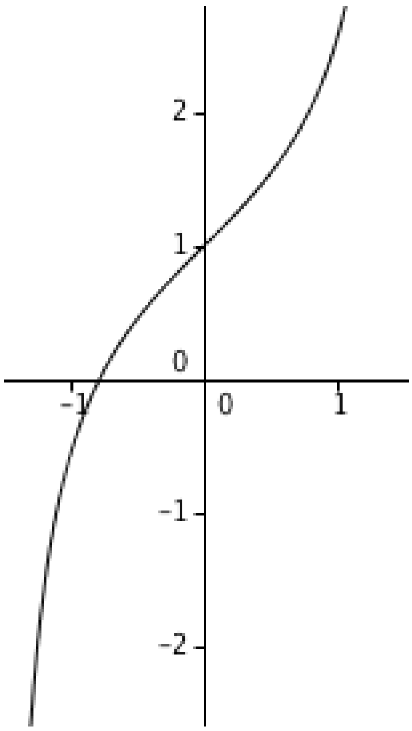
$f(x) = x^5$

und Linearkombinationen davon:

$$f(x) = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \ ...$$

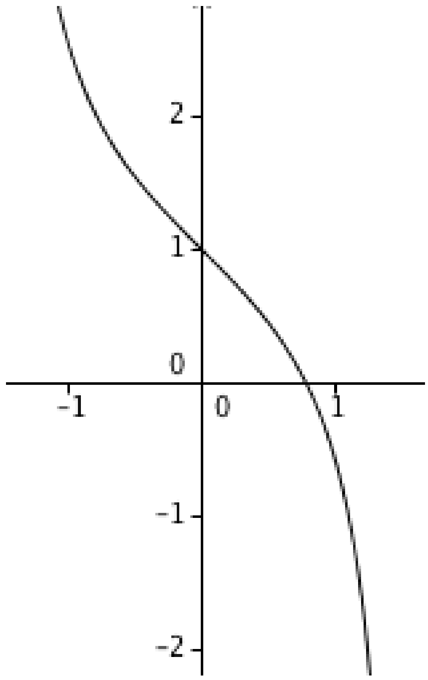
aber auch bei: $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

MONOTONIE



Diese Funktion ist im gezeigten Abschnitt (streng) monoton steigend:

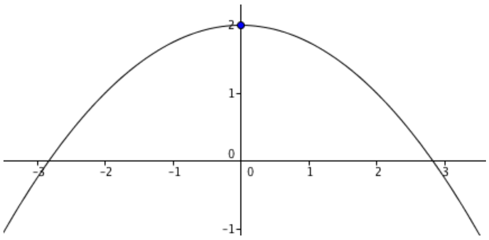
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$$

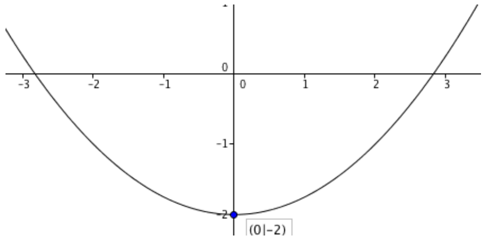


Diese Funktion ist im gezeigten Abschnitt streng monoton fallend:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$$

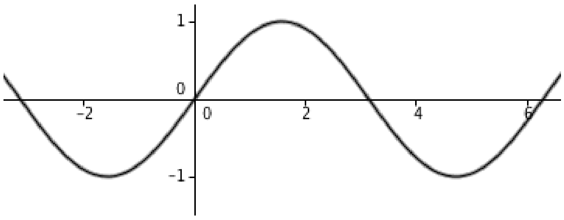
Beschränktheit





Diese Funktion ist nach oben beschränkt;
es gibt eine Zahl $S(=2)$,
so dass für alle x gilt: $f(x) \leq S$

Diese Funktion ist nach unten beschränkt;
es gibt eine Zahl $S(=-2)$,
so dass für alle x gilt: $f(x) \geq S$



Die Sinusfunktion ist beidseitig beschränkt:
$-1 \leq \sin x \leq 1$

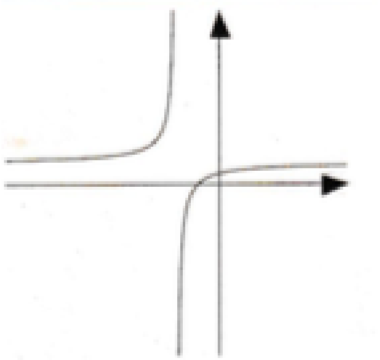
Nullstellen

Als Nullstellen bezeichnet man die Stellen mit .
Im Grafen sind das die Schnittpunkte mit der x-Achse.

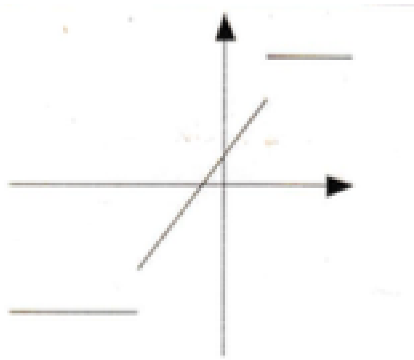
Stetigkeit

Stetige Funktionen lassen sich in einem Zug (ohne den Bleistift abzuheben) zeichnen.

Die folgenden zwei Beispiele sind nicht überall stetig:



Unstetig (nicht definiert) bei $x = -1$



Unstetig (Sprung) bei $x = -2$ und $x = 1$

Grenzverhalten für x→∞

Eine ganzrationale Funktion n. Grades verhält sich für grosse Zahlen wie ihr Glied vom n. Grad.

Beispiel:

$f(x) = 10x^2 - 2x^3 - 12$ verhält sich für grosse Zahlen wie. $\overline{f}(x) = -2x^3$.

Es gilt: $x \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$ und $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to \infty$