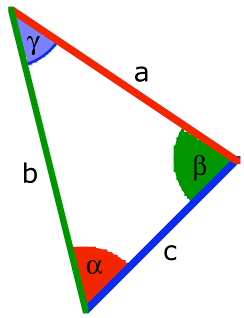
TRIGONOMETRIE IM BELIEBIGEN DREIECK

DER SINUSSATZ

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



- Halten Sie sich beim Lernen der Formel an die Farben und nicht an die Buchstaben.
- Benützen Sie diese Formel immer dann, wenn Sie ein Paar Seite - Gegenwinkel kennen.
- Nehmen Sie die erste Formel, wenn Sie eine Seite berechnen wollen.
- Nehmen Sie die zweite Formel, wenn Sie einen Winkel berechnen wollen.
- Berechnen Sie mit dem Sinussatz möglichst spitze Winkel und nicht den Winkel, der der grössten Seite gegenüber liegt.

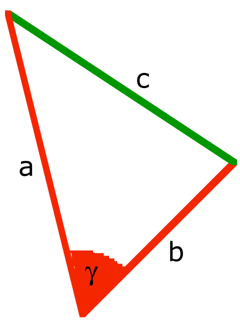
DER COSINUSSATZ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Die Formel ist zyklisch vertauschbar:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

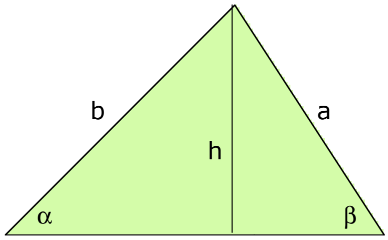
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$

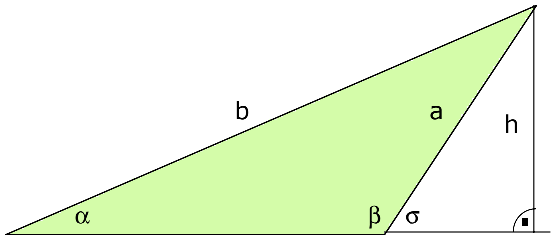


FLÄCHE

$$A = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Beweis des Sinussatzes





$\frac{h}{a} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad h = a\sin\alpha$

$\frac{h}{b} = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad h = b\sin\beta$

$\frac{h}{a} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad h = a\sin\alpha$

$\frac{h}{b} = \sin\sigma \quad \Rightarrow \quad h = b\sin\sigma$

Wir werden im nächsten Kapitel begründen, dass $\sin\sigma = \sin(180° - \beta) = \sin\beta$.
Es spielt also keine Rolle, ob das Dreieck stumpf- oder spitzwinklig ist. *

Wir setzen die beiden Terme für h einander gleich:

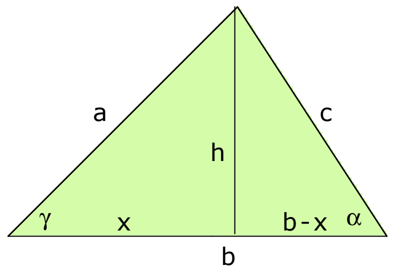
$$a\sin\beta = b\sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

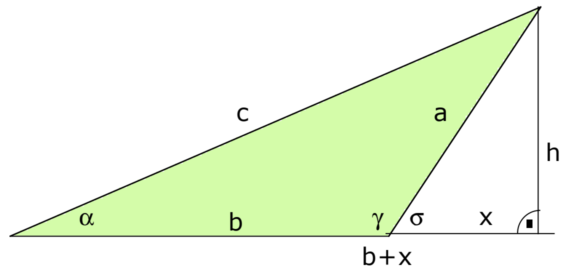
Zeichnet man statt der h_c die h_a ein erhält man:

$$b\sin\gamma = c\sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

* Der Taschenrechner liefert $\sin 150° = 0.5$ ebenso problemlos wie $\sin 30° = 0.5$.
Im umgekehrten Fall ist aber Vorsicht geboten!
Zu $\sin\alpha = 0.5$ gibt es zwei Winkel α von denen der Taschenrechner nur den kleineren angibt. Wir müssen uns von Fall zu Fall überlegen, ob als Lösung $\alpha = 30°$ oder $\alpha = 150°$ oder gar alle beide in Frage kommen.

Beweis des Cosinussatzes





$\frac{h}{a} = \sin\gamma \quad \Rightarrow \quad h = a\sin\gamma$

$\frac{x}{a} = \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad x = a\cos\gamma$

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b-x)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ &= a^2\sin^2\gamma + b^2 - 2ba\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma \\ &= a^2\sin^2\gamma + a^2\cos^2\gamma + b^2 - 2ba\cos\gamma \\ &= a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

$\frac{h}{a} = \sin\sigma \quad \Rightarrow \quad h = a\sin\sigma$

$\frac{x}{a} = \cos\sigma \quad \Rightarrow \quad x = a\cos\sigma$

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b+x)^2 \\ &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ &= a^2\sin^2\sigma + b^2 + 2ba\cos\sigma + a^2\cos^2\sigma \\ &= a^2\sin^2\sigma + a^2\cos^2\sigma + b^2 + 2ba\cos\sigma \\ &= a^2(\sin^2\sigma + \cos^2\sigma) + b^2 + 2ab\cos\sigma \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\sigma \end{aligned}$$

Nun gilt bekanntlich: $\cos\sigma = \cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$.
Damit sieht die Formel rechts wieder genauso aus, wie die links.

Der Taschenrechner hat weder mit der Berechnung des $\cos\gamma$ noch mit der Bestimmung des Winkels γ aus $\cos\gamma$ Probleme.

Beweis des Flächensatzes

Unter Berücksichtigung der obenstehenden Figuren und Formeln ergibt sich:

$$A = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}ba\sin\gamma = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma$$