DER BINOMISCHE SATZ

Der binomische Satz ist eine Weiterentwicklung der binomischen Formeln (Übungen dazu finden Sie unter: Algebra für Anfänger/Ganze Zahlen). Während Sie mit diesen Ausdrücke wie:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

berechnen können, lassen sich mit dem binomischen Satz beliebige Potenzen von $(a+b)$ direkt hinschreiben.

Zum Beispiel: $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Dabei sieht man sofort, dass bei der Basis a die Exponenten systematisch absteigen, während die der Basis b aufsteigen

Bleibt noch offen, wie man die Zahlen, die sogenannten Koeffizienten findet.

1. Art: das pascalsche Dreieck

1								für	$(a+b)^0 = 1$
1	1								$(a+b)^1$
1	2	1							$(a+b)^2$
1	3	3	1						$(a+b)^3$
1	4	6	4	1					$(a+b)^4$
1	5	10	10	5	1				$(a+b)^5$
1	6	**15**	**20**	15	6	1			$(a+b)^6$
1	7	21	**35**	35	21	7	1		$(a+b)^7$

Dabei entsteht jede Zahl aus der Summe der beiden obenstehenden:

15 + 20

35

2. Art: Binomialkoeffizienten

Es gilt: $\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1$ $\binom{7}{1} = \binom{7}{6} = 7$ $\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21$ $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$

Diese Zahlen findet man direkt mit dem Taschenrechner: $\binom{7}{3} = 7 \text{ nCr } 3$;

In gewissen Formelsammlungen sind auch Tafeln zu finden (z. B. in der gelben Formelsammlung der DMK – allerdings fehlt jeweils die vorderste 1)

Mit Hilfe der Binomialkoeffizienten schreibt sich unser Beispiel von der vorderen Seite als:

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}a^1b^6 + \binom{7}{7}b^7$$

oder abgekürzt:

$$(a+b)^7 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} a^{7-i} b^i$$

und der allgemeine binomische Satz heisst dann:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Potenzen von Differenzen

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

Die Operationszeichen Plus und Minus wechseln ab, ungerade Exponenten von b bewirken ein Minus, gerade Exponenten von b bewirken ein Plus.

Man überlege:

$$\begin{aligned}(a-b)^7 = \big(a+(-b)\big)^7 &= a^7 + 7a^6\cdot(-b)^1 + 21a^5\cdot(-b)^2 + 35a^6\cdot(-b)^3 + \ldots + (-b)^7 \\ &= a^7 - 7a^6\cdot b^1 + 21a^5\cdot b^2 - 35a^6\cdot b^3 + \ldots - b^7\end{aligned}$$