$y = \ln \frac{x}{x+a}$

Vorarbeit:
Ableitung von

$$u = \frac{x}{x+a}$$

$$u' = \frac{1 \cdot (x+a) - x \cdot 1}{(x+a)^2} = \frac{x+a-x}{(x+a)^2} = \frac{a}{(x+a)^2}$$

Nun wenden wir die
Kettenregel an:

$$y = \ln u \qquad \text{und} \qquad u = \frac{x}{x+a}$$

$$y' = \frac{1}{u} \qquad\qquad u' = \frac{a}{(x+a)^2}$$

und erhalten: $y' = \dfrac{1}{\frac{x}{x+a}} \bullet \dfrac{a}{(x+a)^2} = \dfrac{x+a}{x} \cdot \dfrac{a}{(x+a)^2} = \dfrac{a}{x\,(x+a)}$

Einfachere Lösung unter Anwendung der Regeln für logarithmisches Rechnen.

$$y = \ln \tfrac{x}{x+a} = \ln x - \ln(x+a)$$

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \cdot 1 = \frac{(x+a)-x}{x\,(x+a)} = \frac{a}{x\,(x+a)}$$

Kettenregel!