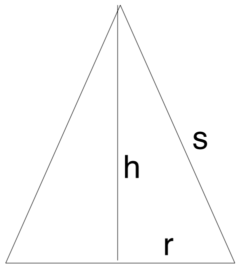
Wie hoch ist der gerade Kreiskegel mit gegebener Mantellinie s, der grösstmögliches Volumen besitzt?

Das, was maximal werden soll, ist das **Volumen** des Kegels:

Hauptfunktion $\boxed{\mathbf{V = \frac{\pi}{3} r^2 h}}$

Die Funktion V hat aber noch 2 Variabeln: r und h;
Eine davon muss eliminiert werden.



Es gilt: $r^2 + h^2 = s^2$

Da s als bekannt vorausgesetzt wird, lässt sich dank dieser Gleichung eine der Variablen aus der andern berechnen:

Es ist: $r^2 = s^2 - h^2$ oder: $h = \sqrt{s^2 - r^2}$

Der 1. Vorschlag ist wesentlich schöner; wir ersetzen also in der Volumengleichung das r^2.

$$\mathbf{V(h) = \frac{\pi}{3}(s^2 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(s^2 h - h^3)}$$

Extrema findet man, indem, man die Funktion **ableitet** und $=$ **0** setzt:

$$\begin{aligned} V'(h) = \tfrac{\pi}{3}(s^2 - 3h^2) &= 0 \\ s^2 &= 3h^2 \\ \mathbf{\frac{s\sqrt{3}}{3} = \frac{s}{\sqrt{3}}} &= \mathbf{h} \end{aligned}$$

Das Volumen ist tatsächlich ein Maximum: $V''(h) = \frac{\pi}{3}(-6h) \quad \Rightarrow \quad V''\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}(-6 \cdot \frac{s}{\sqrt{3}}) < 0$

Übrigens: $r = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; r verhält sich zu s wie die Länge zur Breite eines A4 Blattes!