p: $y = 10 - x^2$

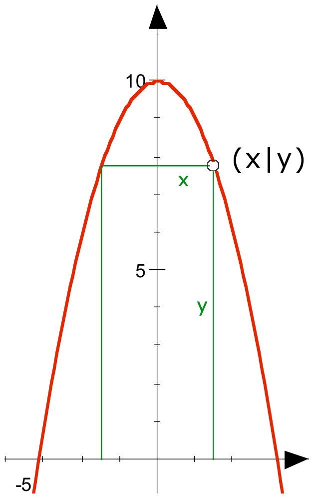
Dem Flächenstück, das die Parabel p mit der x-Achse einschliesst ist ein Rechteck so einzubeschreiben, dass es bei Rotation

a) um die x-Achse

b) um die y-Achse

den Zylinder mit maximalem Volumen erzeugt.

Bestimmen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.



Bei Rotation um die x-Achse:

$$r = y = 10 - x^2$$
$$h = 2x$$
$$V = \pi r^2 h = \pi(10 - x^2)^2 \cdot 2x$$
$$= \pi(100 - 20x^2 + x^4) \cdot 2x$$

Bei Rotation um die y-Achse:

$$r = x$$
$$h = y = 10 - x^2$$
$$V = \pi r^2 h = \pi x^2 y$$
$$= \pi x^2 (10 - x^2)$$

a) **Hauptfunktion:**

$$\boxed{\mathbf{V(x) = 2\pi(100x - 20x^3 + x^5)}}$$

$$V'(x) = 2\pi(100 - 60x^2 + 5x^4) = 10\pi(20 - 12x^2 + x^4) = 10\pi(10 - x^2)(2 - x^2) = 0$$

Lösungen: $x_1 = \sqrt{10}$ $\quad x_2 = \sqrt{2}$

Prüfen:

$$V''(x) = 10\pi(-24x + 4x^3) = 40\pi x(x^2 - 6x)$$
$$V''(\sqrt{10}) = 40\pi\sqrt{10}(100 - 6\sqrt{10}) > 0 \qquad \text{Minimum}$$
$$V''(\sqrt{2}) = 40\pi\sqrt{2}(2 - 6\sqrt{2}) < 0 \qquad \text{Maximum}$$

Die Seiten messen: $\mathbf{2\sqrt{2}}$ und $\mathbf{8}$.

b) **Hauptfunktion:** $$\boxed{V(x) = \pi(10x^2 - x^4)}$$

$V'(x) = \pi(20x - 4x^3) = 4\pi x(5 - x^2) = 0$ Einzige sinnvolle Lösung: $x = \sqrt{5}$

Prüfen: $V''(x) = \pi(20 - 12x^2)$

$V''(\sqrt{5}) = \pi(20 - 60) < 0$ Maximum

Die Seiten messen: $\mathbf{2\sqrt{5}}$ und **5**.