Die Zahlen a und b erfüllen die Bedingung $a+b^2=13$.
Welches ist der kleinste Wert, den $W=a^2+b^3$ annehmen kann?
Wie viel beträgt dieser kleinste Wert unter der Einschränkung, dass a und b positiv sein müssen?

Hauptfunktion $\boxed{\mathbf{W = a^2 + b^3}}$

Auf der rechten Seite hat es noch 2 Variabeln.

Unter Verwendung der Nebenbedingung $a + b^2 = 13$ muss eine davon eliminiert werden.

Einfacher ist das für a: $a = 13 - b^2$

$$a^2 = (13 - b^2)^2 = 169 - 26b^2 + b^4$$

Eingesetzt in der Hauptfunktion ergibt das: $\mathbf{W(b) = 169 - 26b^2 + b^4 + b^3}$

Ableiten und Null setzen!

$$W'(b) = -52b + 4b^3 + 3b^2 = 0$$

$$b(4b^2 + 3b - 52) = 0 \qquad b_1 = 0, \quad b_2 = -4, \quad b_3 = 3.25$$

Diese Lösungen sind mit Hilfe der zweiten Ableitung zu prüfen:

$$W''(b) = -52 + 12b^2 + 6b$$

$W''(0) = -52 < 0$ Maximum

$W''(-4) = -52 + 192 - 24 > 0$ Minimum

$W''(3.25) = -52 + 126.75 + 19.5 > 0$ Minimum

Ohne Nebenbedingung ist: $b = -4$ $a = -3$ **W = -55**

Für $a > 0$ und $b > 0$ ist: $b = 3.25$ $a = 2.4375$ $\mathbf{W \approx 40.27}$