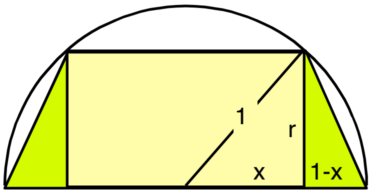
Dem Halbkreis mit Radius 1 soll ein Trapez einbeschrieben werden. Die Grundlinie soll der Halbkreisdurchmesser sein. Bei Rotation des Trapezes um die Grundlinie entsteht ein Körper, dessen Volumen möglichst gross sein soll.
Geben Sie das Volumen des Rotationskörpers an.



$$r^2 + x^2 = 1$$
$$r^2 = 1 - x^2$$

Der Rotationskörper setzt sich zusammen aus einem Kreiszylinder und 2 Kreiskegeln:

$$V = \pi r^2 \cdot 2x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{3} r^2 (1-x) = \pi(2r^2x + \tfrac{2}{3} r^2 (1-x)) = \tfrac{2\pi}{3} r^2 (3x + 1 - x)$$
$$= \tfrac{2\pi}{3} r^2 (2x+1)$$

Mit $r^2 = 1 - x^2$ ergibt sich für die Hauptfunktion:

Hauptfunktion $\boxed{\mathbf{V(x) = \tfrac{2\pi}{3}(1 - x^2)(2x+1)}}$

Ableiten und Null setzen!

$$V(x) = \tfrac{2\pi}{3}(1-x^2)(2x+1) = \tfrac{2\pi}{3}(2x + 1 - 2x^3 - x^2)$$
$$V'(x) = \tfrac{2\pi}{3}(2 - 6x^2 - 2x) = 0$$

Diese Gleichung hat nur eine positive Lösung: $\mathbf{x \approx 0.434}$

$\mathbf{x \approx 0.434}$ ist tatsächlich ein Maximum:

$$V''(x) = \tfrac{2\pi}{3}(-12x - 2) = \tfrac{4\pi}{3}(-6x-1)$$
$$V''(0.434) = \tfrac{4\pi}{3}(-2.6-1) < 0$$

Das Volumen des Körpers beträgt: $\mathbf{V \approx 3.1754}$.