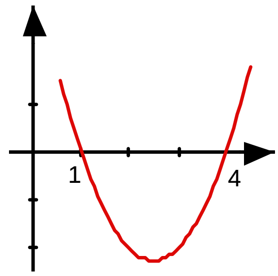
Berechnen Sie den Inhalt der vom Graphen der gegebenen Funktion und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücke.

a) $y = x^2 - 5x + 4$ b) $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$

---

a) $y = x^2 - 5x + 4$



Nullstellen bestimmen: $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) = 0$

Nullstellen bei $x = 1$ und $x = 4$

Integral berechnen:

$$\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\right]_1^4 = \left(\frac{64}{3} - 40 + 16\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right) = -4.5$$

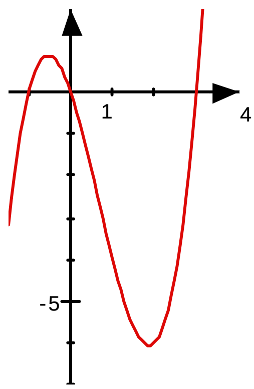
Das Integral ist negativ, weil die Fläche unterhalb der x-Achse liegt.

Der gesuchte Flächeninhalt ist: $A = 4.5$

b) $y = x^3 - 2x^2 - 3x$

Nullstellen bestimmen: $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = x(x+1)(x-3) = 0$

Nullstellen bei $x = -1$, $x = 0$ und $x = 3$



Ein Teil der Fläche ist oberhalb, der andere Teil ist unterhalb der x-Achse. Die Integrale müssen dementsprechend getrennt berechnet werden!

Integrale berechnen:

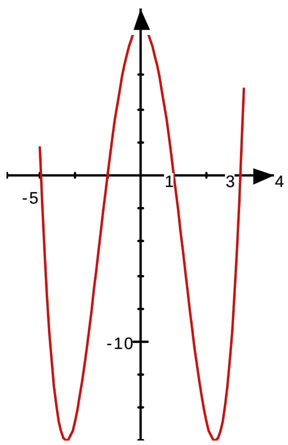
$$\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-3x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{12}$$

$$\int_{0}^{3}(x^3-2x^2-3x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}=\left(\frac{81}{4}-\frac{54}{3}-\frac{27}{2}\right)-0=-11\frac{3}{12}$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist: $\mathbf{A}=\frac{7}{12}+11\frac{3}{12}=\mathbf{11\frac{5}{6}}$

c) $y=x^4-10x^2+9$

Die Funktion ist gerade, der Graph achsensymmetrisch;
wir berechnen nur die rechte Hälfte!



Nullstellen:

$$x^4-10x^2+9=(x^2-9)(x^2-1)$$
$$=(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)=0$$

Nullstellen bei $x=\pm3$ und $x=\pm1$

Integrale:

$$\int_{0}^{1}(x^4-10x^2+9)dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{10x^3}{3}+9x\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{5}-\frac{10}{3}+9\right)-0=5\frac{13}{15}$$

$$\int_{1}^{3}(x^4-10x^2+9)dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{10x^3}{3}+9x\right]_{1}^{3}=\left(\frac{243}{5}-30+27\right)-5\frac{13}{15}=-20\frac{4}{15}$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist: $\mathbf{A}=\left(5\frac{13}{15}+20\frac{4}{15}\right)\cdot2=\mathbf{52\frac{4}{15}}$