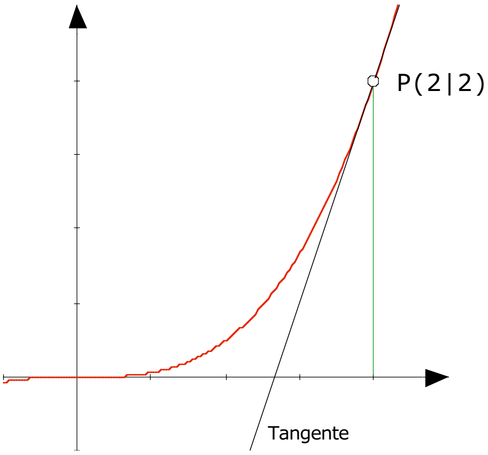
Die Parabel $y = \frac{1}{4}x^3$, ihre Tangente im Punkt $P(2/y_P)$und die x-Achse schliessen eine Fläche ein, die um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Berechnung der Tangentengleichung

$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2/2)$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$

$y - 2 = 3(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 4$



Schnitt der Tangente mit der x-Achse

$3x - 4 = 0$

$x = \frac{4}{3}$

Wir berechnen zuerst das Rotationsvolumen im Intervall [0/2]:

$$V = \pi\int_0^2 f^2 dx = \pi\int_0^2 \frac{x^6}{16} dx = \pi\left[\frac{x^7}{16 \cdot 7}\right]_0^2 = \pi\,\frac{2^7}{16 \cdot 7} - 0 = \frac{8\pi}{7}$$

Davon abzuziehen ist das Volumen eines Kreiskegels mit r=2 und $h = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$$V_{Kegel} = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{9}$$

Damit erhalten wir: $\mathbf{V} = \frac{8\pi}{7} - \frac{8\pi}{9} = \boldsymbol{\frac{16\pi}{63}}$