Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das die Graphen der Funktionen f und g einschliessen.

a) $f: \quad y = x \qquad g: \quad y = x^3$

b) $f: \quad y = 2x - 3 \qquad g: \quad y = x^2 - 2x - 8$

c) $f: \quad y = x^3 \qquad g: \quad y = 2x - x^2$

d) $f: \quad y = x^2 - 3x \qquad g: \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x$

---

a) $f: \quad y = x \qquad g: \quad y = x^3$

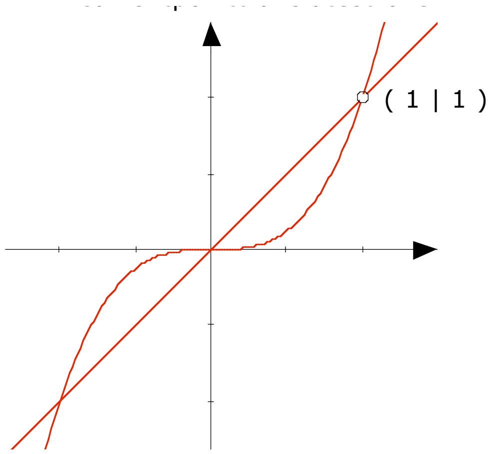
Schnittpunkte berechnen:

$$f = g \quad \Rightarrow \quad f - g = 0$$

Diese zweite Form ist vorteilhaft, weil der Term $f - g$ anschliessend gleich als Integrand dient!

$$f - g = \quad x - x^3 = 0$$
$$x(1 - x^2) = 0$$

Schnitt bei $x = 0$ und $x = \pm 1$



Flächeninhalt berechnen:

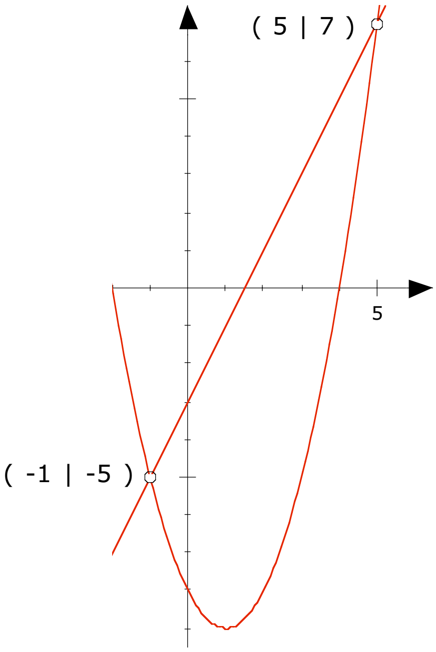
Da die beiden Funktionen punktsymmetrische Graphen haben, genügt es, eine der Flächen auszurechnen!

$$\int_0^1 (x - x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4}$$

Der Inhalt beider Flächen ist $\frac{1}{2}$

b) f : $y = 2x - 3$ g : $y = x^2 - 2x - 8$

Schnittpunkte berechnen:



$$\begin{aligned} f - g &= (2x-3) - (x^2 - 2x - 8) = 0 \\ f - g &= -x^2 + 4x + 5 = 0 \\ & x^2 - 4x - 5 = 0 \\ & (x-5)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

Schnitt bei $x = 5$ und $x = -1$

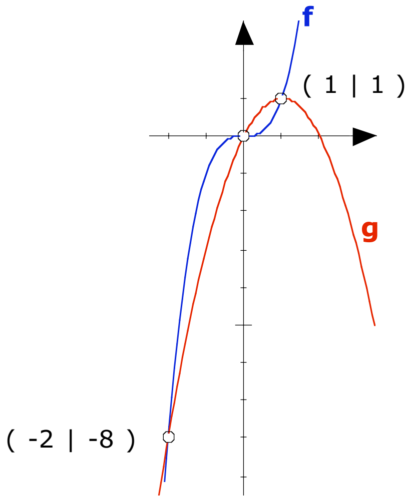
Flächeninhalt berechnen:

Die Fläche besteht aus einem einzigen Stück; es spielt keine Rolle, wo die x-Achse ist!

$$F = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_{-1}^{5}$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + 50 + 25 \right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5 \right) = 36$$

c) $f: \quad y = x^3 \qquad g: \quad y = 2x - x^2$



Schnittpunkte berechnen:

$$f - g = \quad x^3 - (2x - x^2) = 0$$
$$f - g = \quad x^3 + x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 + x - 2 = 0$$
$$x(x-1)(x+2) = 0$$

Schnitt bei $x = -2$, $x = 0$ und $x = 1$

Flächeninhalt berechnen:

Die Fläche besteht aus zwei Stücken, die separat berechnet werden müssen!

$$\int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) = \frac{8}{3}$$

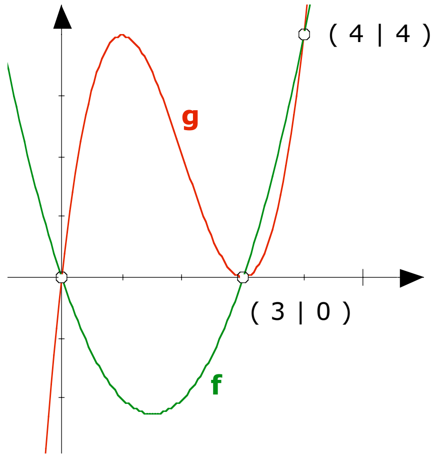
$$\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{5}{12}$$

Beim zweiten Integral hätten wir eigentlich $g - f$ anstelle von $f - g$ rechnen müssen; deshalb ist das Integral negativ.
Für die Gesamtfläche nehmen wir selbstverständlich den Betrag dieser Zahl.

$$\mathbf{F} = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} = \mathbf{3\,\tfrac{1}{12}}$$

d) f : $y = x^2 - 3x$ g : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Schnittpunkte berechnen:



$$\begin{aligned}
f - g &= (x^2 - 3x) - (x^3 - 6x^2 + 9x) = 0 \\
f - g &= -x^3 + 7x^2 - 12x = 0 \\
&\quad -x(x^2 - 7x + 12 = 0 \\
&\quad -x(x-3)(x-4) = 0
\end{aligned}$$

Schnitt bei $x = 0$, $x = 3$ und $x = 4$

Flächeninhalt berechnen:

Die Fläche besteht aus zwei Stücken, die separat berechnet werden müssen!

$$\int_0^3 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2\right]_0^3 = \left(-\frac{81}{4} + 63 - 54\right) - 0 = -\frac{45}{4}$$

$$\int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2\right]_3^4 = \left(-64 + \frac{448}{3} - 96\right) - \left(-\frac{45}{4}\right) = \frac{7}{12}$$

Beim ersten Integral hätten wir eigentlich $g - f$ anstelle von $f - g$ rechnen müssen;
deshalb ist das Integral negativ.
Für die Gesamtfläche nehmen wir selbstverständlich den Betrag dieser Zahl.

$$\mathbf{F} = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{142}{12} = \mathbf{11\tfrac{5}{6}}$$