Bestimmen Sie Radius und Höhe eines geraden Kreiszylinders, der bei gegebenem Volumen V=1 dm^3 eine minimale Oberfläche aufweisen soll.

Rechnung in dm.

Für das Volumen des Kreiszylinders gilt: $V = \pi r^2 h = 1$

Diese Gleichung lässt sich einfacher nach h auflösen: $h = \frac{1}{\pi r^2}$

Für die Oberfläche: $A = 2\pi\left(r^2 + rh\right) = 2\pi\left(r^2 + r\cdot\frac{1}{\pi r^2}\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{1}{\pi r}\right)$

Ableiten: $A' = 2\pi\left(2r - \frac{1}{\pi r^2}\right)$

und Null setzen: $2\pi\left(2r - \frac{1}{\pi r^2}\right) = 0$

$$2r = \frac{1}{\pi r^2}$$

$$r^3 = \frac{1}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}} \approx 0.54\,\text{dm}$$

Es wäre noch die Höhe zu berechnen:

$$h^3 = \frac{1}{\pi^3 r^6} = \frac{1}{\pi^3 (r^3)^2} = \frac{1}{\pi^3}\cdot\left(\frac{1}{r^3}\right)^2 = \frac{1}{\pi^3}\cdot\left(2\pi\right)^2 = \frac{4}{\pi}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1.08$$

Das ist genau das Doppelte von r! $2\cdot r = 2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \sqrt[3]{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

Ein Längsschnitt durch den Zylinder ergibt ein Quadrat – genau diese Form haben unsere Konservendosen mit einem Liter Inhalt.