Skizzieren Sie die Parabel p: $y = \frac{a - x}{a - 1} x^2 \quad a > 1$

Das Kurvenstück zwischen den Nullstellen wird um die x-Achse gedreht.
Für welchen Wert von a wird das Volumen des Rotationskörpers minimal?

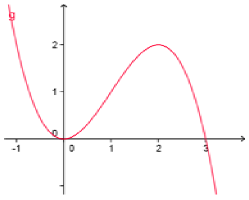
Grundlagen für die Skizze:

einfache Nullstelle bei $x = a$

doppelte Nullstelle bei $x = 0$

$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad y \to -\infty$

(Zeichnung für $a = 3$)



Für die Berechnung des Rotationsvolumens benötigen wir y^2 :

$$y^2 = \frac{(a-x)^2}{(a-1)^2} \cdot x^4 = \frac{1}{(a-1)^2} \cdot (a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)$$

Nun lässt sich mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen als Funktion von a berechnen:

$$V(a) = \frac{\pi}{(a-1)^2} \int_0^a (a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)\,dx = \frac{\pi}{(a-1)^2} \left[\tfrac{1}{5} a^2x^5 - \tfrac{2}{6} ax^6 + \tfrac{1}{7} x^7 \right]_0^a$$

$$= \frac{\pi}{(a-1)^2} \cdot \left(\frac{a^7}{5} - \frac{a^7}{3} + \frac{a^7}{7} \right) = \frac{\pi a^7}{105\,(a-1)^2}$$

Wir leiten die Funktion V(a) nach a ab, um das Minimum zu finden:

$$V'(a) = \frac{\pi}{105} \cdot \frac{7a^6(a-1)^2 - 2(a-1)a^7}{(a-1)^4} = \frac{\pi}{105} \cdot \frac{7a^6(a-1) - 2a^7}{(a-1)^3} = \frac{\pi}{105} \cdot \frac{5a^7 - 7a^6}{(a-1)^3}$$

Die Gleichung $\frac{\pi}{105} \cdot \frac{5a^7 - 7a^6}{(a-1)^3} = 0$ hat eine einzige von Null verschiedene Lösung: $a = \frac{7}{5} = 1.4$

Es handelt sich tatsächlich ein Minimum:

Steigung vorher: $V'(1.3) = \frac{\pi}{105} \cdot \frac{1.3^6\,(6.5 - 7)}{(1.3-1)^3} < 0$, die Kurve fällt

Steigung nachher: $V'(1.5) = \frac{\pi}{105} \cdot \frac{1.5^6\,(7.5 - 7)}{(1.5-1)^3} > 0$, die Kurve steigt

$$5a^7 - 7a^6 = a^6(5a - 7)$$