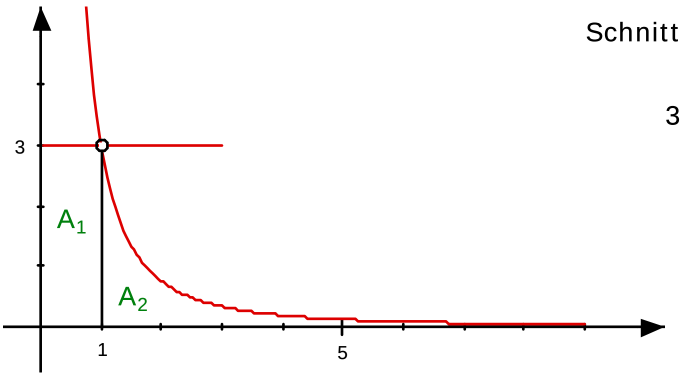
Welchen Inhalt hat die Fläche im 1. Quadranten zwischen den beiden Graphen und der x-Achse?

a) $f:\ y = 3, \quad g:\ y = \dfrac{3}{x^2}$

b) $f:\ y = \dfrac{x^2}{4}, \quad g:\ y = \dfrac{4}{x^2}$

Lösung der Aufgabe a



Schnitt von f und g:

$$3 = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x = \pm 1$$

Die Fläche setzt sich zusammen aus dem Rechteck $A_1 = 1 \cdot 3 = 3$
und der unendlichen Fläche im Intervall $[1;\ \infty]$.

Für das Integral in [1;a] gilt:

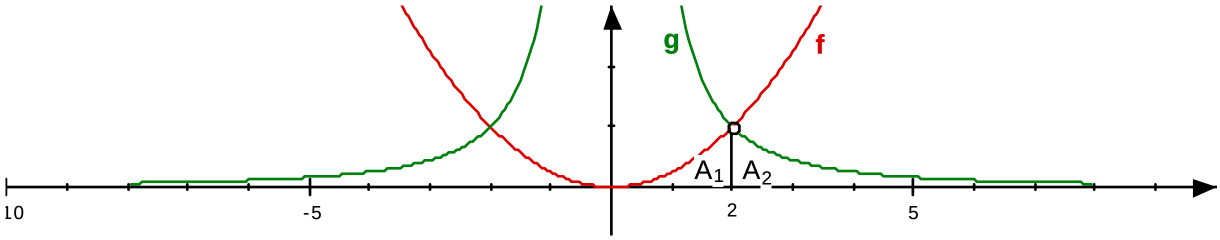
$$\int_1^a 3x^{-2}\,dx = \left[-3x^{-1}\right]_1^a = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^a = -\frac{3}{a} - \left(-\frac{3}{1}\right) = 3 - \frac{1}{a}$$

Damit erhalten wir für die zweite Fläche:

$$A_2 = \lim_{a\to\infty}\left(3 - \frac{1}{a}\right) = 3$$

Die gesamte gesuchte Fläche ist: $\mathbf{A} = A_1 + A_2 = 3 + 3 = \mathbf{6}$

Lösung der Aufgabe b



Wir rechnen zuerst die Schnittpunkte aus:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$$

Die erste Fläche ist endlich:

$$A_1 = \tfrac{1}{4}\int_0^2 x^2\,dx = \tfrac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{8}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Die zweite Fläche ist unendlich:

Für das Integral in [2;a] gilt:

$$\int_2^a 4x^{-2}\,dx = \left[-4x^{-1}\right]_2^a = \left[-\frac{4}{x}\right]_2^a = -\frac{4}{a} - \left(-\frac{4}{2}\right) = 2 - \frac{4}{a}$$

Damit erhalten wir für die zweite Fläche:

$$A_2 = \lim_{a\to\infty}\left(2 - \frac{4}{a}\right) = 2$$

Die gesamte gesuchte Fläche ist: $\mathbf{A} = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + 2 = \mathbf{\frac{8}{3}}$