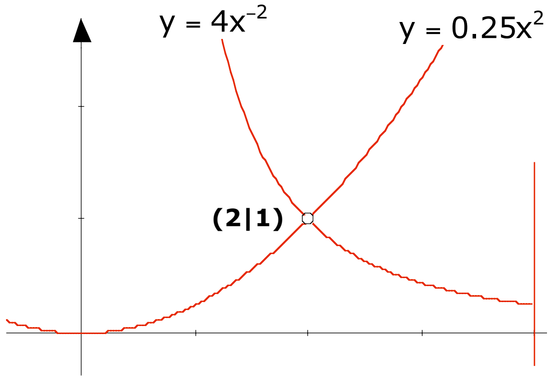
a) Bestimmen Sie den Inhalt der im 1. Quadranten liegenden Fläche, die von den Funktionen $y=0.25x^2$ und $y=4x^{-2}$ sowie der Geraden $x=4$ gebildet wird.
Lassen Sie diese Fläche um die x-Achse rotieren und berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.



Fläche und Volumen setzen sich je aus zwei Teilen zusammen.

Fläche

$$A_1 = \int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{8}{12} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_2^4 4x^{-2}\,dx = \left[-4x^{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{4}{x}\right]_2^4 = -\frac{4}{4} + \frac{4}{2} = 1$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} + \mathbf{1} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$

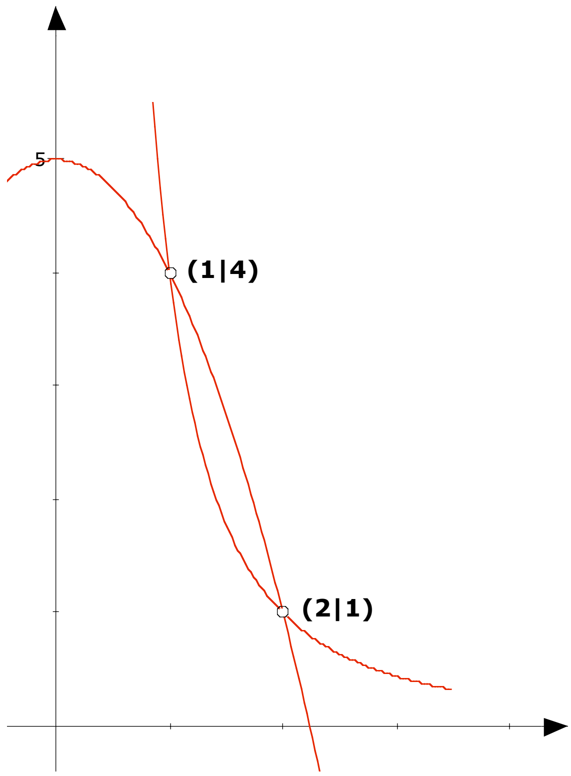
Volumen

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^2 \frac{x^4}{16}\,dx = \left[\frac{x^5}{80}\right]_0^2 = \frac{32}{80} - 0 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^2 16x^{-4}\,dx = \left[\frac{16x^{-3}}{-3}\right]_0^2 = \left[-\frac{16}{3x^3}\right]_0^2 = -\frac{16}{3\cdot 4^3} + \frac{16}{3\cdot 8} = -\frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{7}\pi}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{59}\pi}{\mathbf{60}}$$

b) Die Graphen den Funktionen $y=5-x^2$ und $y=4x^{-2}$ schliessen im 1. Quadranten eine Fläche ein, deren Inhalt zu berechnen ist.



Zuerst müssen die Schnittstellen bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
5 - x^2 &= \frac{4}{x^2} \\
5x^2 - x^4 &= 4 \\
x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\
(x^2 - 4)(x^2 - 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Lösungen im 1. Quadranten:

$$x = 1 \quad \text{und} \quad x = 2$$

$$A = \int_1^2 (5 - x^2 - 4x^{-2})\,dx = \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\right]_1^2 = \left(10 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(5 - \frac{1}{3} + 4\right) = \frac{2}{3}$$