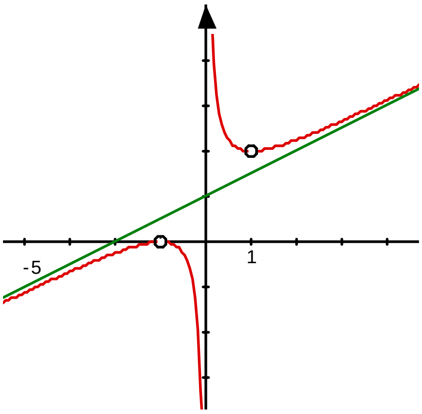
Gegeben sind die Funktionen: $f(x) = ax + \frac{a}{x} + 1$ mit $a > 0$ und $g(x) = -\frac{ax}{3} + b$.

a) Setzen Sie a=0.5 und führen Sie für f(x) eine Kurvendiskussion durch: Definitionsbereich, Pole, Asymptote, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und zeichnen Sie den Graphen mit 2 Häuschen Einheit.

b) Wie gross muss man a und b wählen, damit sich die Graphen von f und g an der Stelle x=a rechtwinklig schneiden?

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebietes, welches von den Kurven von f und g aus Teilaufgabe b) im ersten Quadranten eingeschlossen wird.

Aufgabe a)



$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + 1 = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x}$

Pol für: $x = 0$

Schräge Asymptote: $y = \frac{x}{2} + 1$

Nullstellen: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$ $\quad (-1 \mid 0)$

Extrema: $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2} = 0$ $\quad (-1 \mid 0)$ und $(1 \mid 2)$

Wendepunkte: $f''(x) = \frac{1}{x^3}$ $\quad$ keine Wendepunkte

Aufgabe b)

$f(x) = ax + \frac{a}{x} + 1$ $\qquad$ $f(a) = a^2 + 1 + 1 = a^2 + 2$

$g(x) = -\frac{ax}{3} + b$ $\qquad$ $g(a) = -\frac{a^2}{3} + b$

$f'(x) = a - \frac{a}{x^2}$ $\qquad$ $f'(x) = a - \frac{a}{a^2} = a - \frac{1}{a}$

$g'(x) = -\frac{a}{3}$ $\qquad$ $g'(a) = -\frac{a}{3}$

Nun muss für $x = a$ gelten:

Die Funktionen schneiden sich $\qquad$ $f(a) = g(a)$ $\qquad$ $a^2 + 2 = -\frac{a^2}{3} + b \qquad (1)$

und zwar rechtwinklig: $\qquad$ $f'(a) \cdot g'(a) = -1$ $\qquad$ $-\frac{a}{3} \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right) = -1 \qquad (2)$

Die zweite Gleichung lässt sich nach a auflösen:

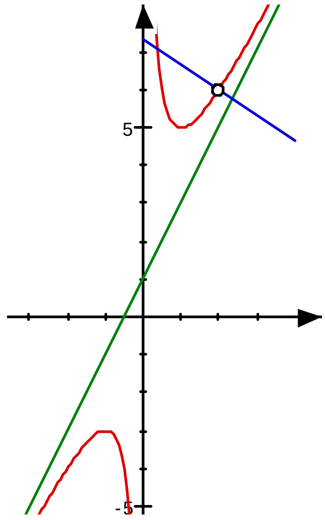
$$-\frac{a^2}{3} + \frac{1}{3} = -1$$
$$-a^2 + 1 = -3$$
$$a^2 = 4$$
$$a = 2 \qquad a > 0!$$

$a = 2$ wird in (1) eingesetzt:

$$4 + 2 = -\frac{4}{3} + b$$
$$b = \frac{22}{3}$$

Aufgabe c)

Schnittpunkte der beiden Kurven:



$$2x+\frac{2}{x}+1=\frac{22-2x}{3}$$
$$8x^2+6+3x=22x-2x^2$$
$$8x^2-19x+6=0$$

Schnitt bei $x=2$ und $x=\frac{3}{8}=0.375$

Es ist: $g(x)-f(x)=\frac{22-2x}{3}-2x+\frac{2}{x}+1=-\frac{8}{3}x+\frac{19}{3}-\frac{2}{x}$

Damit gilt für die Fläche:

$$A=\int_{0.375}^{2}\left(-\frac{8}{3}x+\frac{19}{3}-\frac{2}{x}\right)dx=\left[-\frac{4}{3}x^2+\frac{19}{3}x-2\ln x\right]_{0.375}^{2}=\left(-\frac{16}{3}+\frac{38}{3}-2\ln 2\right)-\left(-\frac{3}{16}+\frac{19}{8}-2\ln\frac{3}{8}\right)$$

$$=\left(\frac{22}{3}-\ln 4\right)-\left(\frac{35}{16}-\ln\frac{9}{64}\right)=\frac{247}{48}-\ln\frac{256}{9}\approx 1.79788$$