a) Diskutieren Sie die Kurve mit der Gleichung f: $y = \dfrac{20x}{x^2 + 5}$

(Nullstellen, Pole, Asymptote, Extrema exakt!)
und zeichnen Sie sie mit 2 Häuschen als Einheit.

b) Welche Fläche schliesst die Kurve mit der x-Achse und der Geraden $x = \sqrt{5}$ ein ? (exakt!)

c) Eine zum Nullpunkt symmetrische ganze rationale Funktion 3. Grades $y = ax^3 + bx$ hat ein Extremum in $E(\sqrt{5} \mid 2\sqrt{5})$.
Bestimmen Sie ihre Gleichung, berechnen Sie die Nullstellen und die Steigung in den Nullstellen und zeichnen Sie sie in die gleiche Figur.

d) Welche Fläche schliessen die beiden Kurven zwischen dem Nullpunkt und der Geraden $x = \sqrt{5}$ ein ?

---

a) $y = \dfrac{20x}{x^2 + 5}$

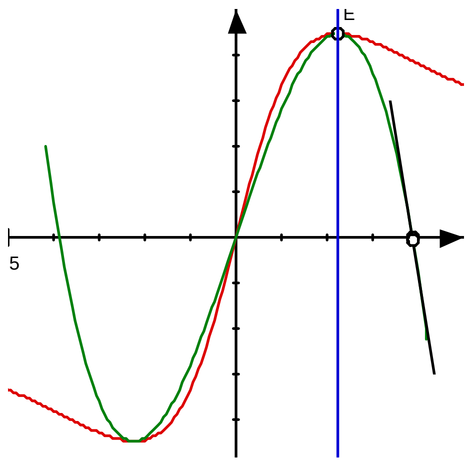
$$y' = \frac{20(x^2+5) - 2x \cdot 20x}{(x^2+5)^2} = \frac{20(5 - x^2)}{(x^2+5)^2}$$

Nullstellen: $(0 \mid 0)$

Pole: keine

Asymptote: $y = 0$

Extrema: $x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad (\pm\sqrt{5} \mid \pm 2\sqrt{5})$



b) $$A_1 = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{20x}{x^2+5}\,dx = \left[10\ln(x^2+5)\right]_0^{\sqrt{5}} = 10\ln 10 - 10\ln 5 = 10(\ln 10 - \ln 5) = 10\ln 2$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 5 \\ du &= 2x\,dx \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{20x}{x^2+5}\,dx = \int \frac{10}{u}\,du = 10\ln u$$

c) $y = ax^3 + bx$ $\quad 2\sqrt{5} = \sqrt{5}(5a + b)$ $\quad \left| \begin{array}{l} 2 = 5a + b \\ 0 = 15a + b \end{array} \right| \Rightarrow a = -\frac{1}{5}, \quad b = 3$

$y' = 3ax^2 + b$ $\quad 0 = 15a + b$

$y = -\frac{1}{5}x^3 + 3x = -\frac{x}{5}(x^2 - 15)$ Nullstellen bei: $x = \pm\sqrt{15}$

$y' = -\frac{3}{5}x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(\pm\sqrt{15}) = -6$

d) $A_2 = \int_0^{\sqrt{5}} (-\frac{1}{5}x^3 + 3x)\,dx = \left[-\frac{1}{20}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{5}} = \left(-\frac{5}{4} + \frac{15}{2}\right) - 0 = 6.25$

$A = A_1 - A_2 = 10\ln 2 - 6.25 \quad (\approx 0.68)$