Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $y = \dfrac{18x}{x^2 + 9}$

a) Diskutieren Sie die Funktion: Nullstellen, Asymptoten, Extremwerte, Wendestellen, Skizze.

b) Welche Stammfunktion von f hat die Nullstellen 3 und -3?

c) Für welchen Wert von a hat das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[0, a]$ den Wert 9?

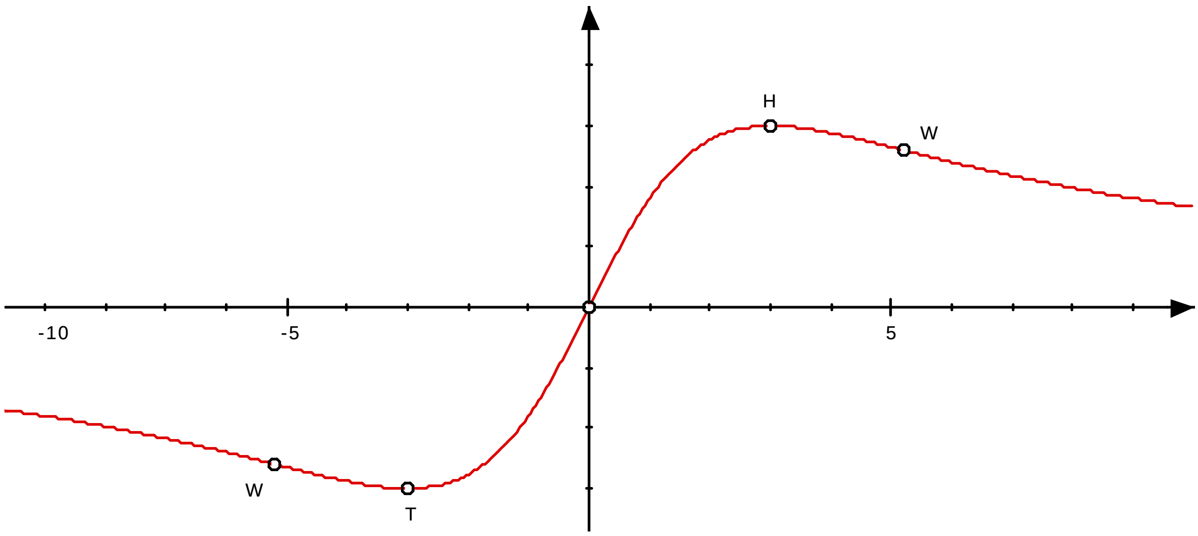
[TSME, Matur BDE, 1992]

---

a) Kein Pol (Nenner ist nie 0)

Asymptote: $y = 0$ (der Grad des Nenners ist höher als der des Zählers)

$y = \dfrac{18x}{x^2 + 9}$	Nullstelle:	$(0 \mid 0)$
$y' = \dfrac{18\,(9 - x^2)}{(x^2 + 9)^2}$	Extrema:	$H(3 \mid 3)$, $T(-3 \mid -3)$
$y'' = \dfrac{36x\,(x^2 - 27)}{(x^2 + 9)^3}$	Wendepunkte:	$W\left(\pm 3\sqrt{3} \mid \pm 1.5\sqrt{3}\right)$ und $(0 \mid 0)$



b) Stammfunktion mit Substitution: $u = x^2 + 9$

$$du = 2x\,dx$$

$$\int \frac{18x\,dx}{x^2+9} = \int \frac{9du}{u} = 9 \cdot \ln u + k = 9 \cdot \ln(x^2+9) + k = 0 \quad \text{für } x = \pm 3$$

Es gilt also.

$$9 \cdot \ln(x^2+9) + k = 0\text{, falls } x = \pm 3 \,.$$

$$9 \cdot \ln(9+9) + k = 0$$

$$9 \cdot \ln(18) + k = 0$$

$$k = -9 \cdot \ln(18) = -\ln(18^9) = \ln\left(\frac{1}{18^9}\right)$$

und die gesuchte Stammfunktion ist: $9 \cdot \ln(x^2+9) - \ln(18^9) = \ln\left(\frac{x^2+9}{18}\right)^9$

c) $\displaystyle\int_0^a \frac{18x\,dx}{x^2+9} = 9\left[\ln(x^2+9)\right]_0^a = 9\,(a^2+9) - 9\ln 9 = 9$

Wir lösen die Gleichung auf:

$$9 \cdot \ln(a^2+9) - 9 \cdot \ln 9 = 9$$

$$\ln(a^2+9) - \ln 9 = 1$$

$$\ln\left(\frac{a^2+9}{9}\right) = 1$$

$$\frac{a^2+9}{9} = e$$

$$a^2 = 9e - 9 = 9(e-1)$$

$$a = 3\sqrt{e-1}$$