Gegeben ist die Funktionsschar f:. f_t : $y = \dfrac{2tx}{1+t^2x^2}$

a) Setzen Sie t=1 und führen Sie eine Kurvendiskussion durch.
(Definitionsbereich, Asymptoten, Nullstellen, Extrema, Graph)

b) Für welchen positiven Wert von k schliessen der Graph der Funktion, die x-Achse und die Vertikalen x=k und x=2k eine Fläche mit dem Inhalt 1 ein?

c) Bestimmen Sie t in f_t so, dass die Steigung des Graphen im Punkt (0|0) m = -3 beträgt.
[Matur TSME, 2000, Flü]

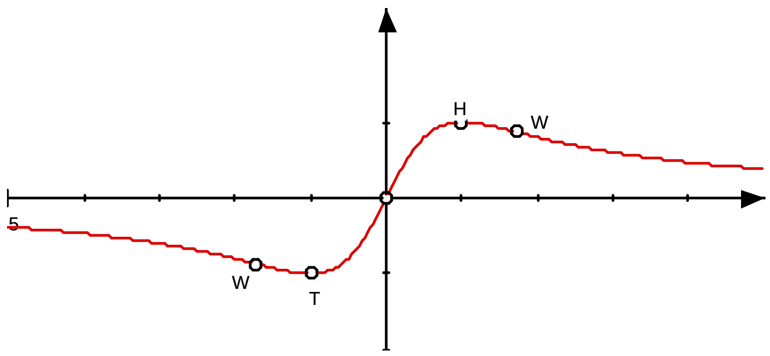
Aufgabe a)

Überall definiert: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, kein Pol.

Die x-Achse ($y = 0$) ist Asymptote (Grad des Nenners grösser als Grad des Zählers).

$y = \dfrac{2x}{1+x^2} = 0$ Nullstelle: $(0 \mid 0)$

$y' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0$ Extrema: $H(1 \mid 1)$, $T(-1 \mid -1)$



Aufgabe b)

Wir berechnen das bestimmte Integral mit den Grenzen k und 2k:

$$\int_k^{2k}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \ln(1+x^2)\Big|_k^{2k} = \ln(1+4k^2) - \ln(1+k^2) = 1$$

Hinweis zur Integration: $1+x^2 = u \quad \Rightarrow \quad 2x\,dx = du \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u}\,du = \ln u$

Wir lösen die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\ln(1+4k^2) - \ln(1+k^2) &= 1\\
\ln\frac{1+4k^2}{1+k^2} &= 1\\
\frac{1+4k^2}{1+k^2} &= e\\
1+4k^2 &= e + ek^2\\
(4-e)\,k^2 &= e-1\\
k &= \sqrt{\frac{e-1}{4-e}}
\end{aligned}$$

Aufgabe c)

$$f_t{}'(x) = \frac{2t\,(1+t^2x^2) - 2t^2x\cdot 2tx}{(1+t^2x^2)^2} = \frac{2t\,(1-t^2x^2)}{(1+t^2x^2)^2}$$

Nun gilt: $\quad f_t{}'(0) = \frac{2\,t}{1} = -3 \quad \Rightarrow \quad t = -1.5$