a) Diskutieren sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{2 + x^2}$

(Nullstellen, Extrema, Wendestellen, Asymptoten, Graph)

b) Bestimmen Sie die Ecken eines Rechtecks ABCD mit Kantenlänge |AB|=2, von dem die Ecken A und B auf der positiven x-Achse liegen und C und D auf dem Graphen von f.

[TSME, Matur BDE, 1982]

Aufgabe a)

Überall definiert: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, kein Pol.

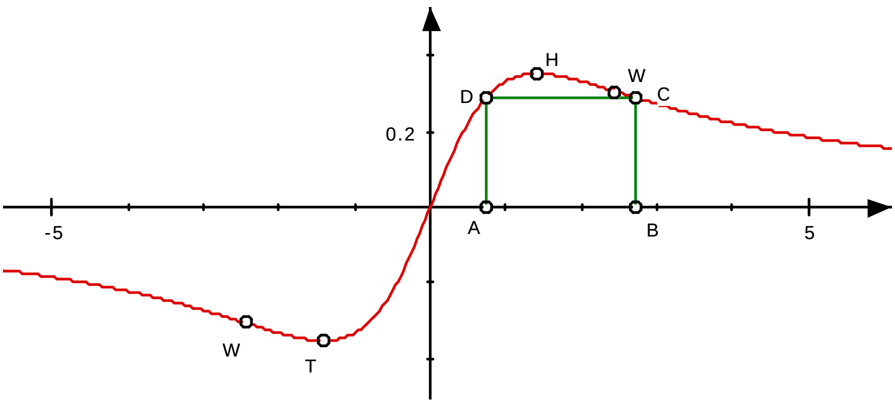
Die x-Achse ($y = 0$) ist Asymptote (Grad des Nenners grösser als Grad des Zählers).

Der Graph der Funktion ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt.

$f(x) = \frac{x}{2 + x^2} = 0$ Nullstelle in $(0 \mid 0)$

$f'(x) = \frac{2 - x^2}{(2 + x^2)^2} = 0$ Extrema: $\left(\pm\sqrt{2} \,\middle|\, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 6)}{(2 + x^2)^3} = 0$ Wendepunkte: $(0 \mid 0)$ und $\left(\pm\sqrt{6} \,\middle|\, \pm\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$



Aufgabe b)

Wenn wir den Punkt A an die Stelle $x = u$ setzen, dann gilt bei B: $x = u + 2$.

Die Funktionswerte müssen an beiden Stellen gleich sein:

$$\begin{aligned} \frac{u}{2+u^2} &= \frac{u+2}{2+(u+2)^2} \\ 2u + u\,(u+2)^2 &= (2+u^2)\,(u+2) \\ u^2 + 2u - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Für exakte Resultate benützen wir die Lösungsformel:

$$u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Gefragt ist die Lösung im 1. Quadranten

$$A\left(\sqrt{3}-1 \mid 0\right), \quad B\left(\sqrt{3}+1 \mid 0\right), \quad C\left(\sqrt{3}+1 \mid \tfrac{\sqrt{3}}{6}\right), \quad D\left(\sqrt{3}-1 \mid \tfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$$