Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = \frac{mx^2 + 2x + m}{x + m}$.

Zu jedem Parameterwert m gehört eine Kurve k_m.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Fixpunkte der Kurvenschar.

b) Berechnen Sie die Gleichungen der Asymptoten und zeichnen Sie die Kurve für $m = 1.5$ ohne Berechnung der Extrempunkte.

c) Berechnen Sie den geometrischen Ort der Schnittpunkte der Asymptoten der Kurven k_m.

[TSME, Matur BDE, 1983]

Aufgabe a)

Fixpunkte sind Punkte, durch die zwei Kurven mit ungleichen Parametern $m \neq n$ gehen.

Wir berechnen also die Schnittpunkte zweier verschiedener Funktionen der Schar:

$$\begin{aligned}
\frac{mx^2 + 2x + m}{x + m} &= \frac{nx^2 + 2x + n}{x + n} \\
(x + n)(mx^2 + 2x + m) &= (x + m)(nx^2 + 2x + n) \\
mx^3 + 2x^2 + mx + mnx^2 + 2nx + mn &= nx^3 + 2x^2 + nx + mnx^2 + 2mx + mn \\
mx^3 - nx^3 + mx - nx + 2nx - 2mx &= 0 \\
x^3(m - n) + x(m - n) - 2x(m - n) &= 0 \qquad \big| : (m - n) \neq 0 \\
x^3 + x - 2x &= 0 \\
x^3 - x &= 0 \\
x(x^2 - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Es gibt drei solche Punkte: $P(0 \mid 1)$, $Q(1 \mid 2)$, $R(-1 \mid 2)$.

Dabei gibt es aber drei Spezialfälle zu beachten:

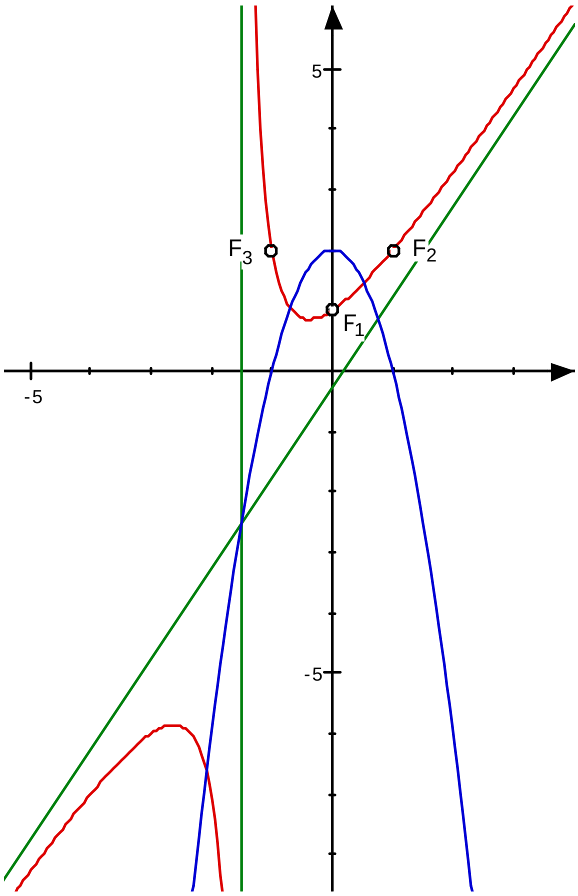
$m=0$	$f_0(x)=2$	diese Kurve geht nur durch Q und R
$m=1$	$f_1(x)=x+1$	diese Kurve geht nur durch P und Q
$m=-1$	$f_1(x)=-x+1$	diese Kurve geht nur durch P und R

Aufgabe b)

$$y = (mx^2 + 2x + m) : (x + m) = mx + 2 - m^2 + \frac{m^3 - m}{x + m}$$

Die Kurven haben einen Pol bei $x = -m$ und die schräge Asymptote $y = mx + 2 - m^2$

Aufgabe c)



Wir setzen $x = -m$ in $y = mx + 2 - m^2$ ein:

$$y = -m^2 + 2 - m^2 = 2 - 2m^2$$
$$x = -m$$

Den geometrischen Ort erhalten wir durch Elimination des Parameters m:

$m = -x$ in $y = 2 - 2m^2$ einsetzen:

$$y = 2 - 2x^2$$

(Diese Kurve ist blau gezeichnet.)