Die Konstanten p, q, r, s der gebrochenen rationalen Funktion $y = \dfrac{x^2 + px + q}{x^2 + rx + s}$ sind so zu bestimmen, dass die Funktion bei $x = 1$ und $x = 2$ je eine Nullstelle, $x = -1$ und bei $x = -2$ je einen Pol hat.

a) Berechne diese Konstanten.
b) Ermittle die Gleichung aller Asymptoten.
c) Welches sind die Extremalstellen der Funktion?
d) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte des Graphen mit der Parabel, welche durch die Zählerfunktion $y=x^2+px+q$ bestimmt wird.
[TSME, Matur BDE, 1990]

Die Lösungen der Aufgaben a) und b) sind aus Platzgründen auf der Rückseite!

Aufgabe c)

$$y' = \frac{6\,(x^2 - 2)}{(x^2 + 3x + 2)^2}$$

Extrema bei $H\left(-\sqrt{2} \,\middle|\, -34.0\right)$, $T\left(\sqrt{2} \,\middle|\, -0.03\right)$

Aufgabe d)

$$x^2 - 3x + 2 = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2) = 1 \cdot (x^2 - 3x + 2)$$

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2) - 1 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2 - 1) = 0$$

Der 1. Faktor hat die Lösungen $x = 2$ und $x = 1$, der 2. Faktor hat die Lösungen $x = -0.38$ und $x = -2.62$.

Schnittpunkte: $(1 \mid 0)$, $(2 \mid 0)$, $(-0.38 \mid 3.29)$, $(-2.62 \mid 16.71)$

Aufgabe a)

Nullstellen bei 1 und 2:

$$(x-1)(x-2) = x^2 + px + q$$
$$x^2 - 3x + 2 = x^2 + px + q$$

Daraus ergibt sich:

$$p = -3, \quad q = 2$$

Pole bei −1 und −2.

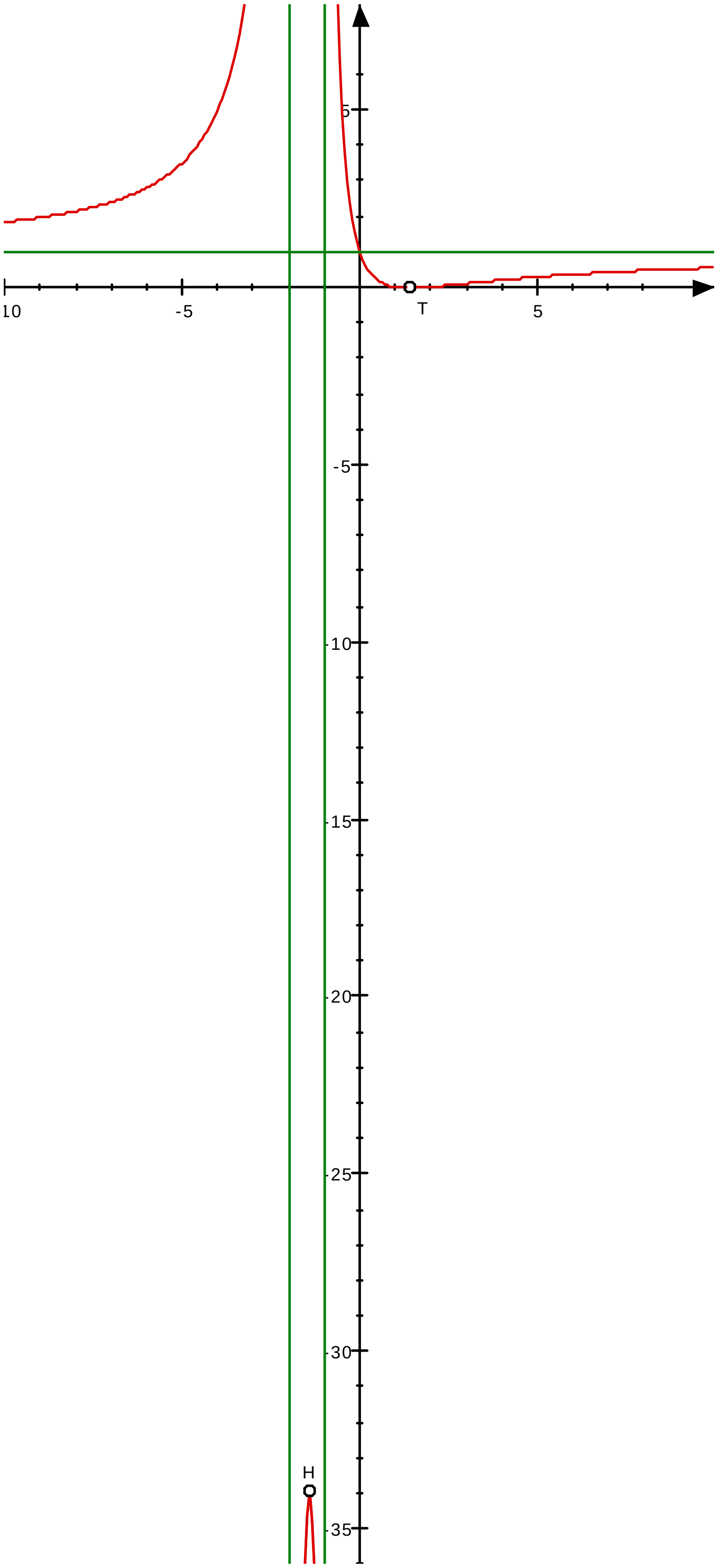
$$(x+1)(x+2) = x^2 + px + q$$
$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + px + q$$

Daraus ergibt sich:

$$r = +3, \quad s = 2$$

Die Funktion heisst:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$



Aufgabe b)

Pole: $x = -1, \quad x = -2$,

waagrechte Asymptote:

$$y = 1 \left(= \frac{x^2}{x^2}\right)$$