Gegeben ist eine Kurvenschar durch $y = \frac{3x^2 - a}{x^3}$.

a) Diskutieren Sie den Fall $a = 3$ ausführlich.
b) Bestimmen Sie die Extremalpunkte als Funktion von a.
c) Auf welcher Kurve liegen diese Extremas?
d) Bestimmen Sie a so, dass der Funktionsgraph die Gerade $y = x$ berührt!

[TSME, Matur BDE, 1989]

$$y = \frac{3x^2 - a}{x^3} = \frac{3x^2 - 3}{x^3} = \frac{3(x^2 - 1)}{x^3}$$

$$y' = \frac{3 \cdot (a - x^2)}{x^4} = \frac{3 \cdot (3 - x^2)}{x^4}$$

$$y'' = \frac{6 \cdot (x^2 - 2a)}{x^5} = \frac{6 \cdot (x^2 - 6)}{x^5}$$

Aufgabe a)

Die Funktion ist symmetrisch zu O.

Pol: $x = 0$

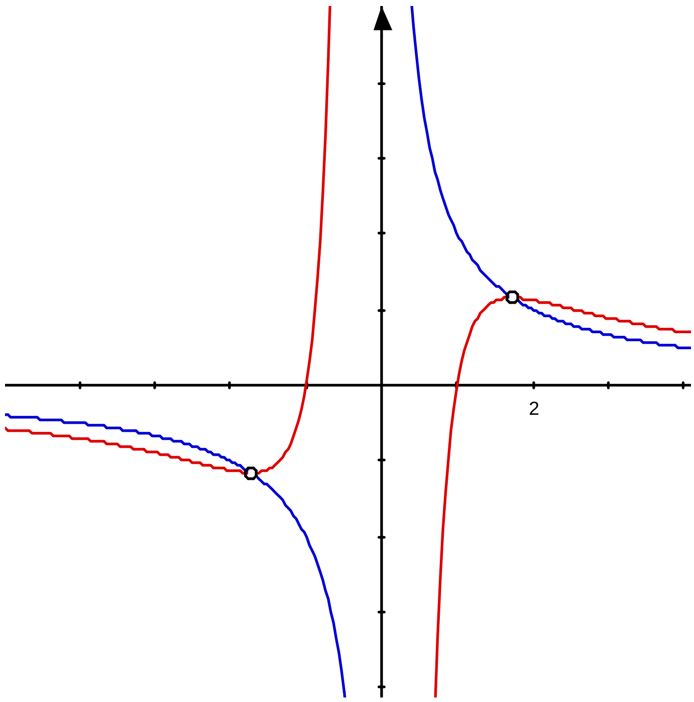
Asymptote: $y = 0$

Nullstellen: $(\pm 1 \mid 0)$

Extrema: $\left(\pm\sqrt{3} \;\middle|\; \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Wendepunkte: $\left(\pm\sqrt{6} \;\middle|\; \pm\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)$

$m = -\frac{1}{4}$



Aufgabe b)

Extrema von $f_a(x)$: $x = \pm\sqrt{a}$

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt{a}}$$

Aufgabe c)

Der Parameter $\pm\sqrt{a}$ wird aus den beiden Gleichungen aus b) eliminiert: $y = \frac{2}{x}$

Aufgabe d)

Die Punkte müssen den gleichen Funktionswert haben: $\frac{3x^2 - a}{x^3} = x$ (1)

Die Ableitung (Steigung) muss übereinstimmen: $\frac{3 \cdot (a - x^2)}{x^4} = 1$ (2)

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{lcl} x^4 & = & 3x^2 - a \\ x^4 & = & 3a - 3x^2 \end{array} \right| \cdot 3$$

$$4x^4 = 6x^2$$

Da die Funktion für $x=0$ nicht definiert ist, lässt sich die Gleichung durch $4x^2$ dividieren:

$$x^2 = 1.5 \quad \Rightarrow \quad a = 3x^2 - x^4 = 4.5 - 2.25 = 2.25 \text{ aus (1)}$$