Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x}$
(Definitionsbereich, Extrema, Verhalten am Rand des Definitionsbereichs, Graph)

$$f(x) = \tfrac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{4}\cdot 2(x-5)\cdot 1\cdot\sqrt{x} + \tfrac{1}{4}(x-5)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-5)\sqrt{x}}{2} + \frac{(x-5)^2}{8\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x-5)\sqrt{x}}{2} + \frac{(x-5)^2\sqrt{x}}{8x} = \frac{(x-5)\sqrt{x}}{8x}(4x+x-5)$$

$$= \frac{(x-5)\sqrt{x}}{8x}(5x-5) = \frac{5(x-5)(x-1)\sqrt{x}}{8x}$$

Oder: Sie schreiben die gegebene Funktion um:

$$f(x) = \tfrac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x} = \tfrac{1}{4}(x^2-10x+25)\cdot x^{0.5} = \tfrac{1}{4}(x^{2.5}-10x^{1.5}+25x^{0.5})$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{4}(2.5x^{1.5}-15x^{0.5}+12.5x^{-0.5}) \qquad \Big|\cdot\frac{x}{x}$$

$$= \tfrac{1}{4x}\left(\tfrac{5}{2}x^{2.5}-\tfrac{30}{2}x^{1.5}+\tfrac{25}{2}x^{0.5}\right) = \frac{x^{0.5}}{8x}(5x^2-30x+25)$$

$$= \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x^2-6x+5) = \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x-5)(x-1)$$

Definiert ist die Funktion für $x \geq 0$.

Nullstellen bei: $x = 0$ und $x = 5$

Extrema: $(1|4)$ und $(5|0)$

Steigungsverhalten: wir klären die Vorzeichen von $f'(x) = \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x-5)(x-1)$ ab.
Der Bruch ist im ganzen Definitionsbereich positiv.

Für $(x-5)(x-1)$ gilt:	$0 < x < 1$	$\Rightarrow$	$x-5<0$ und $x-1<0$	positiv, steigend
	$1 < x < 5$	$\Rightarrow$	$x-5<0$ und $x-1>0$	negativ, fallend
	$5 < x < \infty$	$\Rightarrow$	$x-5>0$ und $x-1>0$	positiv, steigend

Daraus ergibt sich: $(1|4)$ ist ein Maximum und $(5|0)$ ist ein Minimum

Verhalten am Rand:

$x = 0: \quad y = 0$

in $f'(x) = \frac{1}{4}(2.5x^{1.5} - 15x^{0.5} + 12.5x^{-0.5})$ gehen für $x \to 0$ die ersten beiden Glieder gegen 0 und das dritte gegen unendlich; die Steigung ist senkrecht.

Für $x \to \infty$ werden sowohl der y-Wert als auch die Steigung beliebig gross.

Graph