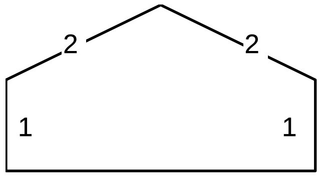
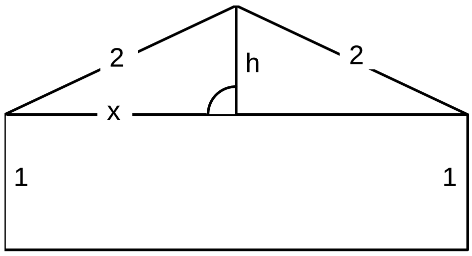
Einem Rechteck wird ein gleichschenkliges Dreieck aufgesetzt. Wie breit muss das Rechteck sein, damit der Flächeninhalt der ganzen Figur maximal wird?



Zur Vermeidung von Brüchen bezeichnen wir die halbe Grundlinie mit x.



Dann ist $h = \sqrt{4 - x^2}$

Die Fläche berechnet sich aus Rechteck und Dreieck:

$$A = 2x \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = 2x + x \cdot \sqrt{4 - x^2}$$

Nun berechnen wir die Ableitung (unter Verwendung von Produkt und Kettenregel) und setzen sie gleich Null:

$$A' = 2 + 1 \cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (-2x) = 2 + \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

Diese Gleichung wird mit dem Nenner $\sqrt{4 - x^2}$ multipliziert und es resultiert eine einfache Wurzelgleichung:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{4 - x^2} + (4 - x^2) - x^2 &= 0 \\
2\sqrt{4 - x^2} &= 2x^2 - 4 \\
\sqrt{4 - x^2} &= x^2 - 2 \qquad \Big|\ (\ )^2 \\
4 - x^2 &= x^4 - 4x^2 + 4 \\
0 &= x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)
\end{aligned}$$

Die einzige brauchbare Lösung dieser Gleichung ist $x = \sqrt{3}$.

Die Breite des Rechtecks ist $\mathbf{2\sqrt{3}}$.