Die von den beiden Kurven und der x-Achse begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse. Das Volumen des Rotationskörpers ist gesucht.

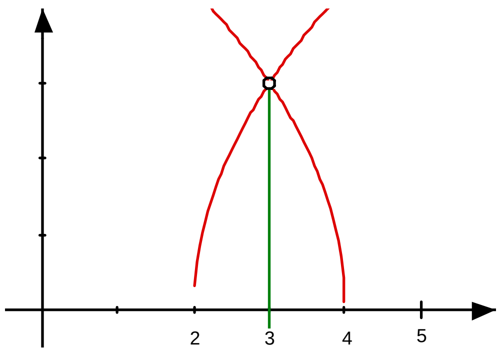
a) $f(x) = 3\sqrt{4-x}$, $g(x) = 3\sqrt{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{2x+2}$, $g(x) = 2\sqrt{x-3}$

Aufgabe a

Schnitt:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{4-x} &= 3\sqrt{x-2} \\ \sqrt{4-x} &= \sqrt{x-2} \\ 4-x &= x-2 \\ 6 &= 2x \\ x &= 3 \end{aligned}$$



$f(x) = 3\sqrt{4-x}$ schneidet die Achse in $x = 4$,

$g(x) = 3\sqrt{x-2}$ schneidet die Achse in $x = 2$.

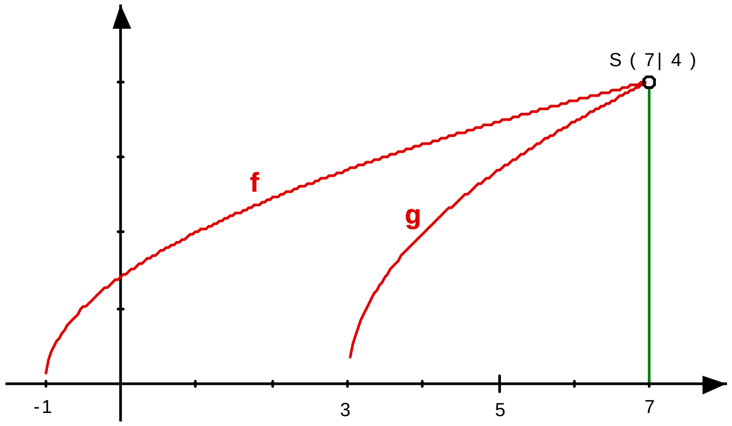
Wir berechnen die beiden Teilvolumina:

$$V_1 = \pi\int_2^3 (g(x))^2\,dx = \pi\int_2^3 9\cdot(x-2)\,dx = 9\pi\left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = 9\pi(4.5-6) - 9\pi(2-4) = 4.5\pi$$

V_2 ist genau gleich gross, die beiden Funktionen sind symmetrisch bezüglich $x = 3$.

Für das Volumen gilt: $\mathbf{V = 9\pi}$

Aufgabe b



Schnitt:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+2} &= 2\sqrt{x-3} \\ 2x+2 &= 4(x-3) \\ 2x+2 &= 4x-12 \\ 14 &= 2x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

da sehen Sie gerade $f^2 = g^2$!

$f(x) = \sqrt{2x+2}$ schneidet die Achse in $x = -1$, $g(x) = 2\sqrt{x-3}$ schneidet die Achse in $x = 3$.

Wir haben zwei Teilvolumina zu berechnen:

$$V_1 = \pi\int_{-1}^{7} f^2\,dx = \pi\int_{-1}^{7}(2x+2)\,dx = \pi\left[x^2+2x\right]_{-1}^{7} = \pi(49+14) - \pi(1-2) = 64\pi$$

und

$$V_2 = \pi\int_{3}^{7} g^2\,dx = \pi\int_{3}^{7}(4x-12)\,dx = \pi\left[2x^2-12x\right]_{3}^{7} = \pi(98-84) - \pi(18-36) = 32\pi$$

Das Gesamtvolumen ergibt sich hier aus der Differenz der beiden Teilvolumina:

$$\mathbf{V} = V_1 - V_2 = 64\pi - 32\pi = \mathbf{32}\pi$$