[TSME, Matur BDE, 1993]

Gegeben sei die Gleichung $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

a) Diskutieren Sie die zugehörige Funktion vollständig. Berechnen Sie insbesondere auch die Steigungen an Rand des Definitionsbereiches.

b) Quadrieren Sie die gegebene Gleichung. Welche Kurve wird durch die Lösungsmenge der quadrierten Gleichung definiert?

c) Welche endliche Fläche wird von der Lösung bei b) eingeschlossen?

---

a) Kurvendiskussion

Ableitungen

$$f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{1.5}}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = [-1;+1]$

Punktsymmetrie

Nullstellen bei $x = 0$ und $x = \pm 1$

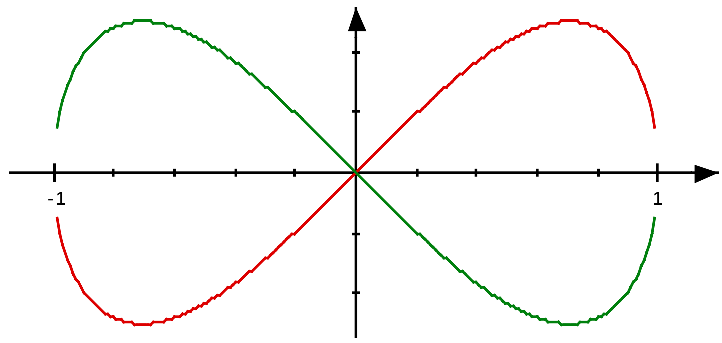
Extrema: $M\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \middle| \pm\frac{1}{2}\right)$

Wendepunkt: $W(0|0)$ mit $f'(0) = 1$

Die andern beiden Lösungen liegen nicht im Definitionsbereich.

Verhalten am Rande des Definitionbereiches: für $x \to \pm 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to \infty$

Graph



b) Die quadrierte Funktion hat auch die Werte der Funktion $f(x) = -x\sqrt{1-x^2}$ als Lösungen. Im Bild wird der Graph gespiegelt. Siehe grüne Linie oben.

c) Fläche berechnen.

$$\mathbf{A} = 4 \cdot \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int \sqrt{t}\, dt = -2 \cdot \left[\frac{2}{3} t^{1.5}\right] = -\frac{4}{3} \cdot \left[(1-x^2)^{1.5}\right]_0^1$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot (0-1) = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

Substitution:

$$\boxed{\begin{aligned} t &= 1-x^2 \\ dt &= -2x dx \\ -\frac{1}{2} dt &= x dx \end{aligned}}$$