[TSME, Vorprüfung BDE, 1992]

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x} - \frac{x^2}{2}$

a) Bestimmen Sie die Extremwerte und die Nullstellen der Funktion.
Skizzieren Sie den Graphen über [0,5]

b) Lässt man den Graphen von f um die x-Achse rotieren, so entsteht eine "Zwiebel".
Bestimmen Sie die Querschnittsfläche dieser Zwiebel bei einem Schnitt durch die x-Achse.

c) Berechnen Sie das Volumen der Zwiebel von Teilaufgabe b).

---

## A) KURVENDISKUSSION

**Definitionsbereich:** $\mathbb{D} = [0; \infty[$

**Nullstellen:**

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \sqrt{x} - \frac{x^2}{2} &= 0 \\
4 \cdot \sqrt{x} &= \frac{x^2}{2} \\
8\sqrt{x} &= x^2 \\
64x &= x^4 \\
0 &= x^4 - 64x = x(x^3 - 64)
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich die Nullstellen $x = 0$ und $x = 4$

Für $x \to 0$ gilt $f'(x) \to \infty$ und $f'(4) = -3$

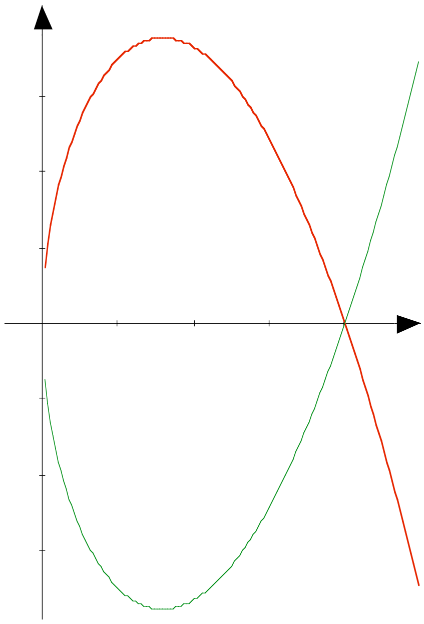
**Extremum**

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - x = \frac{2 - x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

Aus $x\sqrt{x} = 2$ ergibt sich $x^2 \cdot x = 4$; das Maximum ist bei $M\left(\sqrt[3]{4} \,\middle|\, 3\sqrt[3]{2}\right)$

.

**Graph:**



## b) Fläche

$$A = 2\int_0^4 (4x - \tfrac{1}{2}x^2)\,dx = \left[\tfrac{8}{3}x^{1.5} - \tfrac{1}{6}x^3\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

## c) Rotationsvolumen

$$f(x)^2 = (4x^{0.5} - \tfrac{1}{2}x^2)^2 = 16x - 4x^{2.5} + \tfrac{1}{4}x^4$$

$$V = \pi\int_0^4 (16x - 4x^{2.5} + \tfrac{1}{4}x^4)\,dx = \pi\left[8x^2 - \tfrac{8}{7}x^{3.5} + \tfrac{1}{20}x^5\right]_0^4 \approx 32.9\pi = 103.4$$