Gegeben sind die Funktionen f: $y = 3\sqrt{x}$ und g: $y = \sqrt{36 - 3x}$.

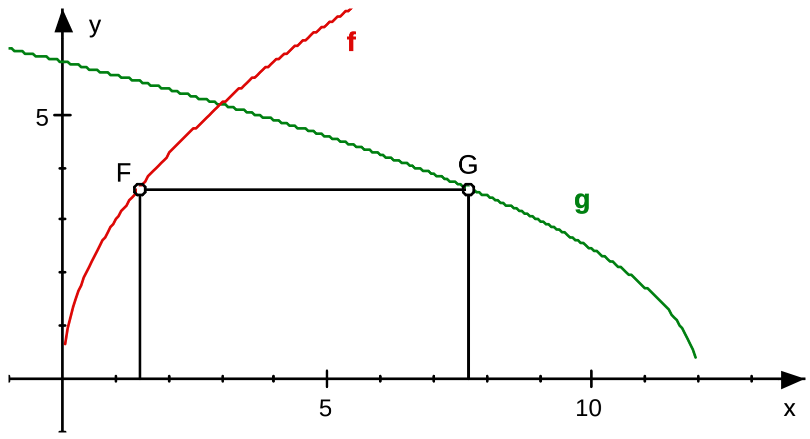
a) Zeichnen Sie die Graphen von f und g und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

b) Die beiden Graphen begrenzen zusammen mit der x-Achse ein Flächenstück.
Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht?

c) Die Ecken A und B eines Rechtecks liegen auf der x-Achse, $G \in g$ und $F \in f$.
Berechnen Sie die Seiten BC=AD so, dass die Fläche des Rechtecks möglichst gross wird.
[Matur TSME, 1997, Flü]

---

a)



Schnitt für

$$3\sqrt{x} = \sqrt{36 - 3x} \quad \Big| \text{ quadrieren}$$

$$9x = 36 - 3x$$

$$x = 3 \quad y = 3\sqrt{3}$$

b) $$V = \pi\int_0^3 9x\,dx + \pi\int_3^{12} (36 - 3x)\,dx = \pi\left[\frac{9x^2}{2}\right]_0^3 + \pi\left[36x - \frac{3x^2}{2}\right]_3^{12}$$

$$= \pi\left[\frac{81}{2} + \left(12\cdot 36 - \frac{3\cdot 144}{2}\right) - \left(108 - \frac{27}{2}\right)\right] = 162\pi$$

c) Der Punkt $F \in f$ habe die Koordinaten $(a|v)$ wobei $v = 3\sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{9}$

Der Punkt $G \in g$ habe die Koordinaten $(b|v)$ wobei $v = \sqrt{36 - 3b} \quad \Rightarrow \quad b = 12 - \frac{v^2}{3}$

$$A = v\,(b - a) = v\left(12 - \frac{v^2}{3} - \frac{v^2}{9}\right) = 12v - \frac{4v^3}{9}$$

$$A' = 12 - \frac{4v^3}{3} = 0$$

Daraus ergibt sich: $v = 3$, $a = 1$, $b = 9$, $A = 24$

Die 2. Lösung für v gehört nicht zum Definitionsbereich.

Die Fläche wird tatsächlich maximal: für $v < 3 \quad \Rightarrow \quad 12 - \frac{4v^2}{3} > 0$, die Kurve steigt

für $v > 3 \quad \Rightarrow \quad 12 - \frac{4v^2}{3} < 0$, die Kurve fällt.