a) Gib Nullstellen, Extrema, Definitions- und Wertebereich der Funktion $f(x) = 0.5\,(4-x)\sqrt{x}$ und skizziere den Graphen für $x \in [0;5]$.

b) Das im ersten Quadranten liegende Flächenstück zwischen x-Achse und Graph rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen V_1 des entstehenden Rotationskörpers.

c) Dem Rotationskörper wird ein Kegel mit Spitze im Ursprung und mit maximalem Volumen V_2 einbeschrieben. $V_2 = ?$; $V_1 : V_2 = ?$

---

a) Kurvendiskussion

$$f(x) = 0.5\,(4-x)\sqrt{x} = 0.5\,(4-x)\,x^{0.5} = 2x^{0.5} - 0.5x^{1.5}$$

$$f'(x) = x^{-0.5} - 0.75x^{0.5} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{4} = \frac{4-3x}{4\sqrt{x}}$$

Nullstellen: $x = 4$ und $x = 0$

Extremum: $\left(\frac{4}{3} \middle| \frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$

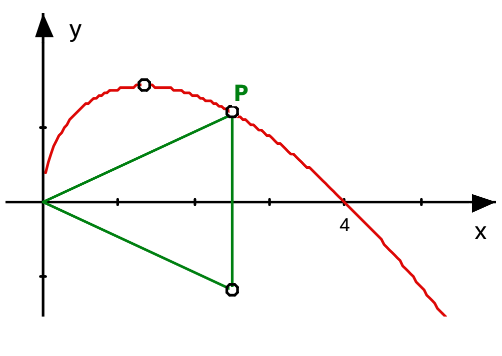
Maximum: für $x < \frac{4}{3}$ ist die Steigung positiv, nachher negativ.

Definitionsbereich: $\left[0\,;\infty\right[$

Wertebereich: $\left[-\infty;\,\frac{8}{3\sqrt{3}}\right[$

Für $x \to 0$ gilt: $f'(x) \to \infty$ die Steigung wird senkrecht.

Graph:



b) Rotationsvolumen

$$f(x) = 0.5\,(4-x)\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f^2(x) = 0.25(4-x)^2 x = 4x - 2x^2 + 0.25x^3$$

$$V_1 = \pi\int_0^4 (4x - 2x^2 + 0.25x^3)\,dx = \pi\left[2x^2 - \tfrac{2x^3}{3} + \tfrac{x^4}{16}\right]_0^4 = \pi\left(32 - \tfrac{128}{3} + 16\right) = \frac{16\pi}{3}$$

c) Kegel

Der Punkt P auf der Kurve hat die Koordinaten x und $y = 0.5\,(4-x)\sqrt{x}$

y ist der Radius des Kegels, x seine Höhe:

Das Volumen eines Kegels ist: $V = \tfrac{\pi}{3}\cdot r^2 h$

also:

$$V = \tfrac{\pi}{3}\left(0.5\,(4-x)\sqrt{x}\right)^2 x = \tfrac{\pi}{3}\,\frac{16 - 8x + x^2}{4}\cdot x\cdot x = \tfrac{\pi}{12}(16x^2 - 8x^3 + x^4)$$

$$V' = \tfrac{\pi}{12}(32x - 24x^2 + 4x^3) = 0$$

$$32x - 24x^2 + 4x^3 = 4x\,(8 - 6x + x^2) = 4x\,(x-2)(x-4) = 0$$

Diese Gleichung hat drei Lösungen: $x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4$
Dabei sind die 1. und die 3. Lösung sicher Minima.

Maximum für $x = 2$ mit $V_2 = \tfrac{\pi}{3}\cdot 2\cdot 2 = \frac{4\pi}{3}$

$$V_1 : V_2 = \frac{16\pi}{3} : \frac{4\pi}{3} = 4:1$$