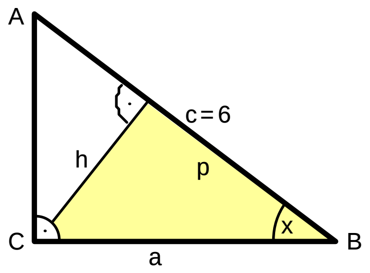
Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei die Hypotenuse $c = 6\,cm$.

a) Zeigen Sie, dass der Inhalt der gelben Dreiecksfläche $A = 18\sin x \cos^3 x$ ist!

b) Für welchen Wert von x ist der Inhalt von A maximal?

[Literargymnasium Rämibühl, 1988]



Im Dreieck ABC lässt sich aus x und c die Kathete $a = BC$ berechnen:

$$\cos x = \frac{a}{6} \quad \Rightarrow \quad a = 6\cos x$$

Nun rechnen wir im gelben Dreieck weiter:

$$\sin x = \frac{h}{a} = \frac{h}{6\cos x} \quad \Rightarrow \quad h = 6\sin x \cos x$$

$$\cos x = \frac{p}{a} = \frac{p}{6\cos x} \quad \Rightarrow \quad p = 6\cos^2 x$$

Damit gilt für die Fläche des gelben Dreiecks:

$$A = \tfrac{1}{2}ph = \tfrac{1}{2} \cdot 6\cos^2 x \cdot 6\sin x \cos x = 18\cos^3 x \cdot \sin x$$

Die Fläche wird **maximal**, wenn die Ableitung von A Null wird:

$$\left(\frac{A}{18}\right)' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x + \cos^3 x \cdot \cos x$$

Kettenregel für $\cos^3 x$

$$= -3\cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x \cdot (\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 0$$

da $\cos x \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$$

$$\cos^2 x = 3\sin^2 x$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x$$

$$\mathbf{30^\circ} = x$$

Alle anderen Lösungen sind hier nicht brauchbar!