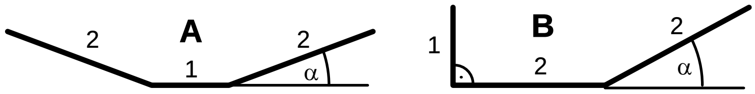
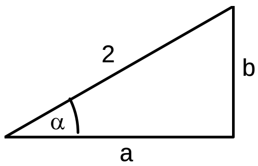
Aus drei Brettern - einem mit Breite 1 und zweien mit Breite 2 - soll ein trapezförmiger Kanal hergestellt werden.

a) Wie muss in Anordnung A der Böschungswinkel α gewählt werden, damit die Querschnittsfläche möglichst gross wird?

b) Als Alternative käme Anordnung B in Frage. Könnte man auf diese Art eine grössere Fläche erzielen?



Im Dreieck gilt:



$$\sin\alpha = \frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 2 \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 2 \cdot \cos\alpha$$

Aufgabe a)

Die Querschnittsfläche A setzt sich zusammen aus einem Rechteck und zwei gleichen rechtwinkligen Dreiecken.

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot b + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \\ &= 2\sin\alpha + 2\cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Ableiten und 0 setzen!

$$\begin{aligned} A' &= 2\cos\alpha + 4\cos\alpha \cdot \cos\alpha + 4\sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) \\ &= 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 4\sin^2\alpha \\ &= 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 4(1-\cos^2\alpha) \\ &= 8\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 4 = 0 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung wird mit dem Taschenrechner gelöst und hat nur eine brauchbare Lösung:

$$\cos\alpha = 0.593 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 53.6^{\circ} \quad \Rightarrow \quad A = 3.52$$

Aufgabe b)

Die Querschnittsfläche B setzt sich zusammen aus einem Rechteck und einem rechtwinkligen Dreieck.

$$\begin{aligned} B &= 2 \cdot b + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \\ &= 4 \sin\alpha + \cos\alpha \cdot 2 \sin\alpha \\ &= 4 \sin\alpha + 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Ableiten und 0 setzen!

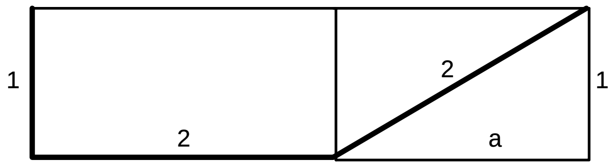
$$\begin{aligned} B' &= 4\cos\alpha + 2\cos\alpha \cdot \cos\alpha + 2\sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) \\ &= 4\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha \\ &= 4\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2(1-\cos^2\alpha) \\ &= 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - 2 = 0 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat als brauchbare Lösung:

$$\cos\alpha = 0.414 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 65.5^{o} \quad \Rightarrow \quad b = 1.8$$

Gemäss Figur kann b höchstens 1 sein; diese Lösung fällt also nicht in den Definitionsbereich.

Es wäre noch abzuklären, ob das Randmaximum für $b = 1$ brauchbar wäre:



$$a = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

Das ergibt eine Fläche von $A = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2.8$, ist also nicht besser.