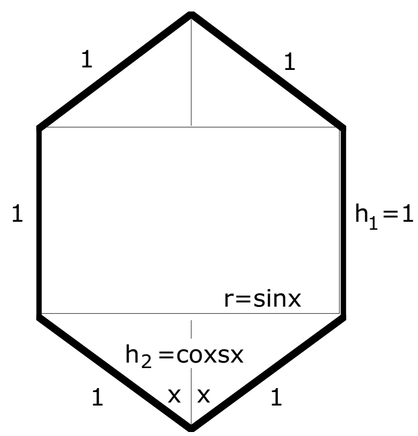
Einem Kreiszylinder werden auf beiden Seiten gleiche Kreiskegel mit gleichem Grundkreis angesetzt.
Der Achsenschnitt des ganzen Körpers ist ein gleichseitiges Sechseck mit Seitenlänge 1.
Der halbe Oeffnungswinkel der Kegel sei x.

a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers in Abhängigkeit von x.

b) Für welchen Winkel x wird dieses Volumen maximal?

[Frauenfeld 2001]



$$V = \pi r^2 h_1 + \tfrac{2\pi}{3} r^2 h_2$$
$$= \tfrac{\pi}{3} r^2 \cdot \left(3h_1 + 2h_2\right)$$
$$= \tfrac{\pi}{3} \sin^2 x \cdot \left(3 + 2\cos x\right)$$

$$0^\circ < x \leq 90^\circ$$

Für den Extremalwert müssen wir die Funktion ableiten und =0 setzen:

$$V' = \tfrac{\pi}{3} \cdot \left(2\sin x \cos x \cdot (3 + 2\cos x) + \sin^2 x \cdot (-2\sin x)\right)$$
$$= \tfrac{\pi}{3} \cdot \left(6\sin x \cos x + 4\sin x \cos^2 x - 2\sin^3 x\right)$$
$$= \tfrac{\pi}{3} \cdot \sin x \cdot \left(6\cos x + 4\cos^2 x - 2\sin^2 x\right) = 0$$

Da $\sin x$ sicher nicht 0 ist, dividieren wir die Gleichung durch $\tfrac{\pi}{3}\sin x$ und durch 2:

$$3\cos x + 2\cos^2 x - \sin^2 x = 0$$
$$3\cos x + 2\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0$$
$$3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung für cosx, die nur eine brauchbare Lösung hat:

$$\cos x \approx 0.263 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 74.7^\circ}$$

Für diesen Winkel sind: $r = 0.96$, $h_2 = 0.26$, $V_{max} = 1.09\,\pi$

Der Randwert mit x=90° und Kegeln der Höhe 0 ist etwas kleiner: $V = \pi$