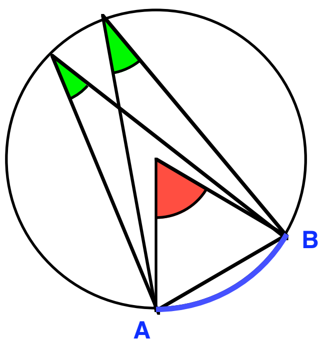
Einer Kugel mit Radius R wird ein Kegel einbeschrieben.
Für welchen Öffnungswinkel ist seine Oberfläche maximal?

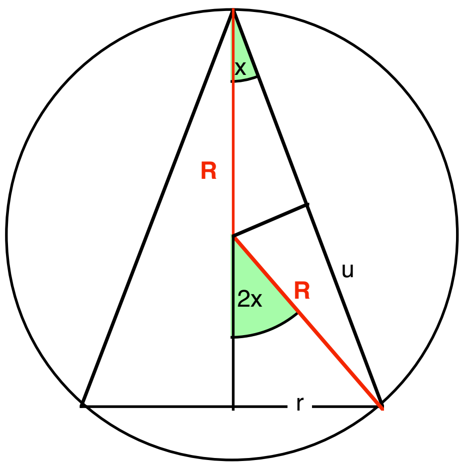
Zuerst etwas Theorie – vielleicht haben Sie es nie durchgenommen, vielleicht haben Sie es vergessen!



Die grünen Winkel heissen Peripheriewinkel; es gibt davon unzählige und sie sind alle gleich gross.

Der rote Winkel ist ein Zentriwinkel oder Mittelpunktswinkel über dem Bogen AB.

Ein Periperiewinkel ist halb so gross wie der zugehörige Zentriwinkel über demselben Bogen AB.



Es ist einfacher, den halben Winkel mit x zu bezeichnen.

Jetzt lässt sich die halbe Seitenlinie u und der Radius r berechnen.

$$\cos x = \frac{u}{R} \qquad u = R\cos x$$

$$\sin 2x = \frac{r}{R} \qquad r = R\sin x$$

Für die Kegeloberfläche gilt: $A = 2\pi r(r + s)$

$$A = \pi r(r+s) = \pi R\sin 2x(R\sin 2x + 2R\cos 2x)$$
$$= \pi R^2 \sin 2x \cdot (\sin 2x + 2\cos x)$$
$$A' = \pi R^2\left[2\cos 2x \cdot (\sin 2x + 2\cos x) + (2\cos 2x - 2\sin x)\cdot \sin 2x\right] = 0$$

Nach Division durch πR^2 wird ausmultipliziert und vereinfacht:

$$2\sin 2x\cos 2x + 4\cos 2x\cos x + 2\sin 2x\cos 2x - 2\sin 2x\sin x = 0$$
$$4\sin 2x\cos 2x - 2\sin 2x\sin x + 4\cos 2x\cos x = 0$$

Nun wende ich die Doppelwinkelformeln an: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ und $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$4\cdot 2\sin x\cos x\cdot(1-2\sin^2 x) - 2\cdot 2\sin x\cos x\sin x + 4\cdot(1-2\sin^2 x)\cos x = 0$$
$$8\sin x\cos x - 16\sin^3 x\cos x - 4\sin^2 x\cos x + 4\cos x - 8\sin^2 x\cos x = 0$$

Diese Gleichung lässt sich durch $4\cos x$ dividieren, da $\cos x = 0$ keine brauchbare Lösung ist.

$$2\sin x - 4\sin^3 x - \sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x = 0$$

Nun haben wir eine kubische Gleichung für $\sin x$:

$$4\sin^3 x + 3\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$$

oder substituiert:

$$4u^3 + 3u^2 - 2u - 1 = 0$$

Man sieht unschwer, dass $u = -1$ eine Lösung der Gleichung ist und erhält mit Polynomdivision:

$$4u^3 + 3u^2 - 2u - 1 = (u+1)(4u^2 - u + 1) = 0$$

die quadratische Gleichung hat die Lösungen: $u_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$

von denen ist nur $u = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ als Lösung brauchbar. $\Rightarrow \quad x \approx 39.8^\circ$