Die Funktion f: $y = a\sin(2x) + b\cos(x)$ ist gegeben.

a) Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph der Funktion im Punkt P(30°| $\sqrt{3}$) die Steigung m=5 besitzt.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Nullstellen und Extrema im Intervall [0|2π]; Skizzieren Sie den Graphen der Funktion in diesem Intervall.

Aufgabe a)

$f(x) = a\sin(2x) + b\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(30^\circ) = a\sin(60^\circ) + b\cos(30^\circ)$

$$\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$f'(x) = a\cos(2x)\cdot 2 - b\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(30^\circ) = a\cos(60^\circ)\cdot 2 - b\sin(30^\circ)$

$$5 = \frac{a}{2}\cdot 2 - \frac{b}{2}$$

Das ergibt das Gleichungssystem:
$$\left|\begin{array}{r} a + b = 2 \\ 2a - b = 10 \end{array}\right|$$

mit den Lösungen: $a = 4$ und $b = -2$

Aufgabe b)

Nullstellen:

$$4\sin(2x) - 2\cos(x) = 0$$
$$8\sin x\cos x - 2\cos x = 0$$
$$2\cos x \cdot (4\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 90^\circ, \quad x_2 = 270^\circ$$
$$\sin x = \tfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 14.5^\circ, \quad x_4 = 165.5^\circ$$

Extrema:

$$8\cos(2x) + 2\sin(x) = 0$$
$$8(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x = 0$$
$$8\sin^2 x - \sin x - 4 = 0$$

$$\sin x = 0.772 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 50.6^\circ, \quad x_6 = 129.4^\circ$$
$$\sin x = -0.647 \quad \Rightarrow \quad x_7 = 319.7^\circ, \quad x_8 = 220.3^\circ$$